2.2 多次元の確率変数と分布

離散型確率変数 X と Y の取りうる値は $a_1, a_2, \cdots$ と $b_1, b_2, \cdots$ とする。
事象 $\{\omega; X(\omega) = a_i,$ かつ $Y(\omega) = b_j\}$ の確率は

$$P(X = a_i, Y = b_j) = h(a_i, b_j)$$

$h(a_i, b_j)$： X, Y の結合確率分布
性質：

$$h(a_i, b_j) \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$
$$\sum_{i,j} h(a_i, b_j) = 1$$

$f(a_i)$, $g(b_j)$ を次のように定義する。

$$f(a_i) = \sum_j h(a_i, b_j), \quad i = 1, 2, \cdots$$

$$g(b_j) = \sum_i h(a_i, b_j), \quad j = 1, 2, \cdots$$

$f(a_i)$, $g(b_j)$： X, Y の周辺確率分布

連続型確率変数 X と Y

ある領域 D について，事象 $\{\omega; (X(\omega), Y(\omega)) \in D\}$ の確率は

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D h(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$h(x, y)$： X, Y の結合確率密度関数

性質：

$$h(x, y) \geq 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

$f(x)$, $g(y)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\mathrm{d}y,$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\mathrm{d}x,$$

$f(x)$, $g(y)$： X, Y の周辺確率密度関数

条件付き分布：

離散型：

$$P(X = a_i|Y = b_j) = f(a_i|b_j)$$
$$\equiv \frac{h(a_i, b_j)}{g(b_j)}$$

$f(a_i|b_j)$： $Y = b_j$ を与えたもとで X の確率分布

性質：

$$f(a_i|b_j) \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots$$
$$\sum_i f(a_i|b_j) = 1$$

連続型：

$$f(x|y) = \frac{h(x, y)}{g(y)}$$

$f(x|y)$： $Y = y$ を与えたもとで X の確率密度関数

性質：

$$f(x|y) \geq 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) = 1$$

確率変数の独立性：

離散型： $h(a_i, b_j) = f(a_i)g(b_j)$ のとき，X と Y は独立となる。
連続型： $h(x, y) = f(x)g(y)$ のとき，X と Y は独立となる。

重要な分布：

1. 多項分布：

離散型確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ について，

$$
\begin{aligned}
&P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \cdots, X_r = k_r) \\
&= \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}
\end{aligned}
$$

$k_1, k_2, \cdots, k_r$ は 0 以上の整数で，$\sum_{i=1}^{r} k_i = n$ を満たす。

n は自然数

$p_1, p_2, \cdots, p_r$ は正の定数で，$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ を満たす。

よって，

$$\boldsymbol{P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \cdots, X_{r-1} = k_{r-1}, X_r = k_r)}$$
$$\boldsymbol{= P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \cdots, X_{r-1} = k_{r-1})}$$

となる。

$\boldsymbol{X_r = n - (k_1 + \ \cdots \ + k_{r-1})}$，$\boldsymbol{p_r = 1 - (p_1 + \ \cdots \ + p_{r-1})}$ なので（$\boldsymbol{X_r}$ と $\boldsymbol{p_r}$ は自動的に決まる）。

2. 2 変数正規分布：

連続型確率変数 $\boldsymbol{X, Y}$ の結合確率密度関数は

$$\boldsymbol{h(x,y)}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}}$$
$$\boldsymbol{\times \exp\Big(- \frac{1}{2(1-\rho^2)} (\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}$$

$$-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}))$$

$$=\frac{1}{2\pi}\begin{vmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{vmatrix}^{-1/2}$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-\mu_1\\ y-\mu_2\end{pmatrix}'\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x-\mu_1\\ y-\mu_2\end{pmatrix}\right)$$

μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, ρ は定数で，$\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $|\rho| < 1$ とする。

$\exp(x)$ は e^x と同じものであることに注意。

2.3 2.4 節のための数学の公式

2.3.1 置換積分

1 変数： $f(x)$ について，$x = \psi(y)$ の置換積分を行う。

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \psi'(y) f(\psi(y))\mathrm{d}y$$

証明：

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow F'(x) = f(x)$

$F(x) = F(\psi(y))$ を y について微分する。

$$\frac{\mathrm{d}F(\psi(y))}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$
$$= f(x)\psi'(y) = f(\psi(y))\psi'(y)$$

統計学の場合は少し要注意：
名称も変数変換と呼ぶ。
連続型確率変数 X の分布関数を $F(x)$，密度関数を $f(x)$ とする。
単調変換（単調増加，または，単調減少） $X = \psi(Y)$ を考える。
Y の分布関数を $G(y)$，密度関数を $g(y)$ として，$g(y)$ を求める。

問： $F(x)$，$f(x)$，$x = \psi(y)$ を使って，$G(y)$，$g(y)$ を求める。

● $\psi'(y) > 0$ の場合（単調増加関数）：

$$
\begin{aligned}
G(y) &= P(Y \le y) = P(\psi^{-1}(X) \le y) = P(X \le \psi(y)) \\
&= F(\psi(y))
\end{aligned}
$$

$$
g(y) = G'(y) = \psi'(y) f(\psi(y))
$$

● $\psi'(y) < 0$ の場合（単調減少関数）：

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(\psi^{-1}(X) \leq y) = P(X \geq \psi(y)) \\ &= 1 - P(X < \psi(y)) = 1 - F(\psi(y)) \end{aligned}$$

$$g(y) = G'(y) = -\psi'(y) f(\psi(y))$$

2 つをまとめて：

$$g(y) = |\psi'(y)| f(\psi(y))$$

2 変数：　$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$ の同時密度関数 $\boldsymbol{f(x,y)}$ について，$\boldsymbol{x = \psi_1(u,v)}$, $\boldsymbol{y = \psi_2(u,v)}$ のとき，$\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{V}$ の同時密度関数 $\boldsymbol{g(u,v)}$ は，

$$\boldsymbol{g(u,v) = ||J||f(\psi_1(u,v), \psi_2(u,v))}$$

となる。ただし，$\boldsymbol{J}$ はヤコビアン（Jacobian）で，

$$\boldsymbol{J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}$$

とする。

$\boldsymbol{|J|}$ はヤコビアンの行列式の値，$\boldsymbol{||J||}$ はヤコビアンの行列式の値の絶対値を表す。

(証明略)