● 行列式の値：

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ とする。

$|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc}$ を行列式の値と言う。

2.3.2 部分積分

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

証明：

$f(x)g(x)$ の微分を考える。

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

両辺を積分すると，

$$\int (f(x)g(x))'\mathrm{d}x$$

$$= \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

となり，

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

を得る。よって，

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

2.3.3　テーラー展開: 関数 $f(x)$ の近似

$x = x_0$ の回りで $f(x)$ をテーラー展開する。

$$\begin{aligned} f(x) \approx f(x_0) &+ f'(x_0)(x - x_0) \\ &+ \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 \\
&+\cdots \\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n
\end{aligned}
$$

ただし，$f^{(n)}(x_0)$ は $f(x)$ を n 回微分して，$x = x_0$ で評価したものである。

$f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ と $0! = 1$ に注意。

2.4 分布関数の持つ性質の証明 (いくつかの分布を例にとって)

1. ２項分布 $\sum_{k=0}^{n} b(k;n,p) = 1$ の証明：

$$
\sum_{k=0}^{n} b(k;n,p)
$$

$$
= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}
$$

$$
= (p + (1-p))^n = 1 \ (2\text{項定理})
$$

2. ポアソン分布 $\sum_{k=0}^{\infty} p(k;\lambda) = 1$ の証明：

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} p(k;\lambda) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ に注意。

なぜなら，$f(x) = e^x$ としたとき，$f^{(k)}(x) = e^x$ となる。

テーラー展開の公式は，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

なので，$x_0 = 0$ として，$x = 0$ の回りでテーラー展開すると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

を得る。

$f^{(n)}(0) = 1$ に注意。

3. 正規分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x =$ 1 の証明：

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u \end{aligned}$$

$u = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ として，置換積分を行う。
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \sigma$ に注意
$I = 1$ の証明は $I^2 = 1$ の証明を行えば十分

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \mathrm{d}u\right) \\
&\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right) \mathrm{d}v\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) \left(\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r\mathrm{d}r\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\infty} \exp(-s)\mathrm{d}s\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}2\pi[-\exp(-s)]_0^{\infty} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$u = r\cos\theta,\ v = r\sin\theta$ として置換積分を行う。

$$
\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} & \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} & \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r
$$

$0 < r < +\infty,\ 0 < \theta < 2\pi$ となることに注意

さらに，$s = \frac{1}{2}r^2$ と置換積分される。

このように，$I^2 = 1$ が得られ，$f(x) \geq 0$ なので，$I = 1$ を得る。

4. 指数分布に従う X の確率密度関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

の証明：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\ &= [-e^{-\lambda x}]_0^{\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

5. 一様分布に従う X の確率密度関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

の証明：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x \\ &= [\frac{1}{b-a}x]_a^{b} \\ &= 1\end{aligned}$$

6. X, Y は 2 変数正規分布に従うとき，X の周辺確率密度関数は？

連続型確率変数 X, Y の結合確率密度関数は

$$h(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$\times \exp\Big(- \frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$
$$-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$
$$+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2})\Big)$$

exp の指数部分を取り上げる。

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$
$$+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2})$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \\
&= -\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left((y-\mu_2) - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu_1)^2\right) \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)\sigma^2}}\exp\Bigg(-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}
\end{aligned}
$$

$$\times\left((y-\mu_2)-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)^2\Bigg)\mathrm{d}y$$

積分の部分は，$N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),(1-\rho^2)\sigma_2^2)$ に対応し，積分値は 1 になる。

したがって，

$$\int\int h(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x=1$$

を得る。$f(x)$ は，平均 μ_1，分散 σ_1^2 の正規分布になっていることに注意せよ。

3　平均値，分散

3.1　平均・分散の定義と公式

1 変数：　確率変数 X のある関数：$g(X)$