$$= p$$

分散：

$\mu = \mathrm{E}(X)$ のとき，$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$ により，$\mathrm{E}(X^2)$ を求める。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{x} x^2 f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{1} x^2 p^x (1-p)^{1-x} \\
&= p
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 \\
&= p - p^2 \\
&= p(1-p)
\end{aligned}$$

2 項分布：

$$\begin{aligned} f(x) &= {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \cdots, n, \end{aligned}$$

$\mathrm{E}(X) = np$, $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$

証明：

平均：

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_x x f(x) \\ &= \sum_x x {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_x x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_x \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= np \sum_x \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\
&= np \sum_{x'} \frac{n'!}{x'!(n'-x')!} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} \\
&= np \sum_{x'} {}_{n'}C_{x'} p^{x'} (1-p)^{n'-x'} \\
&= np
\end{aligned}
$$

ただし，$n' = n - 1$, $x' = x - 1$ と定義される。

確率関数の性質より，

$$
\sum_x {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} = 1
$$

を得ることに注意。

分散：

$\mathrm{V}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}^2) - \boldsymbol{\mu}^2$ により，$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}^2)$ を求める。

$\boldsymbol{X}^2 = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X} - 1) + \boldsymbol{X}$ を利用する。

$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}^2) = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X} - 1)) + \mathrm{E}(\boldsymbol{X})$

したがって，

$\mathrm{V}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X} - 1)) + \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^2$ となる。

右辺第 1 項を求める。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X} - 1)) \\
&= \sum_{x} x(x-1)f(x) \\
&= \sum_{x} x(x-1)\,{}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x} x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x}(1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2}(1-p)^{n-x} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x'} \frac{n'!}{x'!(n'-x')!} p^{x'}(1-p)^{n'-x'} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{x'} {}_{n'}C_{x'} p^{x'}(1-p)^{n'-x'} \\
&= n(n-1)p^2
\end{aligned}
$$

途中で，$n' = n-2$, $x' = x-2$ と定義されている。

まとめると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 \\
&= \mathrm{E}(X(X-1)) + \mu - \mu^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
&= -np^2 + np \\
&= np(1-p)
\end{aligned}
$$

ポアソン分布の平均と分散： **ポアソン分布：**

$$
f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots
$$

$\mathrm{E}(X) = \lambda$, $\mathrm{V}(X) = \lambda$

証明：

平均：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_x x f(x) \\
&= \sum_x x e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_x \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda \sum_{x'} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x'}}{x'!} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

ただし，$x' = x - 1$ と定義される。

確率関数の性質より，

$$
\sum_x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = 1,
$$

を得ることに注意。

分散：

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$ により（ただし，$\mu = \mathrm{E}(X) = \lambda$），$\mathrm{E}(X^2)$ を求める。

$\boldsymbol{X^2 = X(X-1) + X}$ を利用する。

$\mathbf{E}(\boldsymbol{X^2}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{X(X-1)}) + \mathbf{E}(\boldsymbol{X})$

したがって，

$\mathbf{V}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{X(X-1)}) + \boldsymbol{\mu - \mu^2}$ となる。

右辺第 1 項を求める。

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}(\boldsymbol{X(X-1)}) \\
&= \sum_x \boldsymbol{x(x-1)f(x)} \\
&= \sum_x \boldsymbol{x(x-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}} \\
&= \sum_x \boldsymbol{\lambda^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}}
\end{aligned}
$$

$$= \lambda^2 \sum_{x'} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x'}}{x'!}$$

途中で，$x' = x - 2$ と定義されている。

まとめると，

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 \\ &= \mathrm{E}(X(X-1)) + \mu - \mu^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\ &= \lambda \end{aligned}$$

正規分布の平均と分散：　**正規分布：**$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

$\mathbf{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu},\ \mathbf{V}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\sigma}^2$

証明：

平均：

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\boldsymbol{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})+\boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}) \frac{1}{\sqrt{2\pi\boldsymbol{\sigma}^2}} e^{-\frac{1}{2\boldsymbol{\sigma}^2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^2} \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\mu} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\boldsymbol{\sigma}^2}} \left[-\boldsymbol{\sigma}^2 e^{-\frac{1}{2\boldsymbol{\sigma}^2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \boldsymbol{\mu} \\
&= \boldsymbol{\mu}
\end{aligned}$$

確率密度関数の性質から，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\mathrm{d}x \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となることに注意。

合成関数の微分：

$$y = h(g(x)) \implies y = h(u),\ u = g(x)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\
&= h'(u)g'(x) \\
&= h(g(x))g'(x)
\end{aligned}
$$

上の計算では，

$h(u) = -\sigma^2 e^u$, $g(x) = -\dfrac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$

とすればよい。

ロピタルの定理：

ある関数 $g(x)$, $f(x)$ について，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

ならば，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

となる。

例：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$\dfrac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$ に注意。

分散：

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X - \mu)^2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \frac{\mathrm{d}(-\sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2})}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[(x-\mu)(-\sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2})\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

部分積分：

$\displaystyle\int_a^b h(x)g'(x)\mathrm{d}x = [h(x)g(x)]_a^b - \int_a^b h'(x)g(x)\mathrm{d}x$ を利用。

$h(x) = x - \mu,\ g(x) = -\sigma^2 e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$ とする。

正規分布の線形変換： $Z \sim N(0,\ 1)$ のとき，$X = aZ + b \sim N(b,\ a^2)$ となることの証明：

Z が正規分布に関わらず，X の平均・分散は，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(aZ+b) = a\mathrm{E}(Z) + b = b, \\
&\mathrm{V}(aZ+b) = a^2\mathrm{V}(Z) = a^2
\end{aligned}
$$

となる。

正規分布の確率変数の線形変換が $\underline{\underline{\text{正規分布}}}$ ？

変数変換を使う。

Z の密度関数は $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\dfrac{1}{2}z^2)$

$X = aZ + b$，すなわち，$Z = \psi(X) = \dfrac{X-b}{a}$ の線形変換

X の密度関数 $g(x)$ を求める。

$$
\begin{aligned}
g(x) &= |\psi'(x)| f(\psi(x)) \\
&= |\frac{1}{a}| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{X-b}{a})^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \exp(-\frac{1}{2a^2}(X-b)^2)
\end{aligned}
$$

よって，$X = aZ + b \sim N(b,\ a^2)$ となる。