

指数分布の平均と分散： 指数分布：

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 0 < x \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

証明：

平均：

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} x \frac{d(-e^{-\lambda x})}{dx} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [x(-e^{-\lambda x})]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

確率密度関数の性質から，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= [-e^{-\lambda x}]_0^{\infty} \\
&= 1
\end{aligned}$$

に注意。

分散：

$V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により, $E(X^2)$ を求める。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{d(-e^{-\lambda x})}{dx} dx \\ &= [x^2(-e^{-\lambda x})]_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} E(X) \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - \mu^2 \\
 &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\
 &= \frac{1}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$

一様分布の平均と分散： 一様分布：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

証明：

平均：

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

分散：

$V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により, $E(X^2)$ を求める。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b \\
&= \frac{a^2 + ab + b^2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

カイ二乗分布の平均と分散： **カイ二乗分布：**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0 \text{ のとき} \\ 0, & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$E(X) = n, \quad V(X) = 2n$$

証明：

平均：

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{2^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+2}{2})}{2^{-\frac{n+2}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} 2^{-\frac{n+2}{2}} x^{\frac{n+2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n'}{2})} 2^{-\frac{n'}{2}} x^{\frac{n'}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= n \end{aligned}$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} du \implies \text{ガンマ関数 } \Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(1) = 1,$$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ に注意

また, $n' = n + 2$ を使い, 確率密度関数の性質から,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1$$

に注意。

分散：

$V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により, $E(X^2)$ を求める。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n+4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n+4}{2})}{2^{-\frac{n+4}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \\
&\quad \times \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{n+4}{2})} 2^{-\frac{n+4}{2}} x^{\frac{n+4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\
&= 4 \left(\frac{n+2}{2} \right) \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{n'}{2})} 2^{-\frac{n'}{2}} x^{\frac{n'}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx \\
&= n(n+2)
\end{aligned}$$

$n' = n + 4$ を使う。

$$V(X) = n(n+2) - n^2 = 2n$$

4 変数変換と和の分布 (連続型確率変数の場合のみ)

4.1 一変数の場合

$Y = \psi^{-1}(X)$ の分布: 連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$

$X = \psi(Y)$ の一対一変換のとき,
 Y の確率密度関数 $g(y)$ は,

$$g(y) = |\psi'(y)|f(\psi(y))$$

証明：

確率変数 X の分布関数を $F(x)$, 確率密度関数を $f(x)$ とする。
(すなわち, $F(x) = P(X \leq x)$, $f(x) = F'(x)$ である。)

$Y = h(X)$ とする。

$X = \psi(Y)$ のとき, Y の分布を求める。

すなわち, $h^{-1}(Y) = \psi(Y)$ となる。

Y の分布関数を $G(y)$, 確率密度関数を $g(y)$ とする。

$\psi'(X) > 0$ の場合：

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(h(X) \leq y) \end{aligned}$$

$$= P(X \leq h^{-1}(y))$$

$$= P(X \leq \psi(y))$$

$$= F(\psi(y))$$

なので,

$$g(y) = G'(y)$$

$$= \psi'(y)F'(\psi(y))$$

$$= \psi'(y)f(\psi(y))$$

を得る。

$\psi'(X) < 0$ の場合：

$$G(y) = P(Y \leq y)$$

$$= P(h(X) \leq y)$$

$$= P(X \geq h^{-1}(y))$$

$$\begin{aligned}
&= P(X \geq \psi(y)) \\
&= 1 - P(X < \psi(y)) \\
&= 1 - F(\psi(y))
\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}
g(y) &= G'(y) \\
&= -\psi'(y)F'(\psi(y)) \\
&= -\psi'(y)f(\psi(y))
\end{aligned}$$

を得る。 $-\psi'(y) > 0$ に注意したがって、まとめると,

$$g(y) = |\psi'(y)|f(\psi(y))$$

を得る。 $\implies$ 変数変換

例： X は次の一様分布に従う。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

$\lambda > 0$ について, $X = e^{-\lambda Y}$ とするとき, Y の分布は?

$\psi'(y) = -\lambda e^{-\lambda y}$ なので,

$$\begin{aligned} g(y) &= |\psi'(y)|f(\psi(y)) \\ &= \lambda e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

となる。 y のとりうる範囲は, $0 < x < 1$ により, $0 < e^{-\lambda y} < 1$ なので, $0 < y$ となる。したがって,

$$g(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & 0 < y \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

特殊ケース： $Y = X^2$ の分布について： 確率変数 X の分布関数を $F(x)$ ，確率密度関数を $f(x)$ とする。

確率変数 Y の分布関数を $G(y)$ ，確率密度関数を $g(y)$ とする。

$Y = X^2$ の分布関数 $G(y)$ は，

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) \end{aligned}$$

例： $\chi^2(1)$ 分布： $X \sim N(0, 1)$ とするとき， $Y = X^2 \sim \chi^2(1)$ となる。

証明：

X の分布関数とその微分：

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Y の確率密度関数 $g(y)$ は， $y > 0$ について，

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} (F'(\sqrt{y}) + F'(-\sqrt{y})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})2^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)$$

これは $Y \sim \chi^2(1)$ を意味する。

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ に注意

$Y \sim \chi^2(n)$ のとき, Y の確率密度関数は,

$$f(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2})$$

に注意

例: $N(0,1)$ 分布: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ とするとき, $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ となる。

証明:

X の分布関数:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$$

$X = \psi(Y) = \sigma Y + \mu$ なので, Y の密度関数は,

$$\begin{aligned} g(y) &= |\psi'(y)|f(\psi(y)) \\ &= |\sigma| \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \end{aligned}$$

となる。これは, $N(0, 1)$ に一致する。

4.2 二変数の場合

$X = \psi_1(U, V)$, $Y = \psi_2(U, V)$ のとき, (U, V) の分布: 確率変数 X, Y の結合密度関数 $f(x, y)$ について, $X = \psi_1(U, V)$, $Y = \psi_2(U, V)$ のとき, 確率変数

U, V の結合密度関数 $g(u, v)$

$$g(u, v) = |J| f(\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))$$

ただし, J はヤコビアンと呼ばれ,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

である (証明略)。

U の周辺密度関数 $h(u)$:

$$h(u) = \int g(u, v) dv$$

V の周辺密度関数 $p(v)$:

$$p(v) = \int g(u, v) du$$

例：正規分布： X, Y は互いに独立な確率変数でそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うとき, $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ となる。

証明：

X, Y の確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x - \mu_1)^2\right)$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_2^2}(y - \mu_2)^2\right)$$

X, Y の結合確率密度関数は, X, Y は互いに独立な確率変数なので,

$$\begin{aligned} & h(x, y) \\ &= f(x)g(y) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x - \mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}(y - \mu_2)^2\right) \end{aligned}$$

$U = X + Y$, $V = Y$ として, U , V の結合確率密度関数を求める。

$X = U - V$, $Y = V$ なので,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

となるので, U , V の結合確率密度関数 $s(u, v)$ は, 変数変換により,

$$\begin{aligned} & s(u, v) \\ &= h(u - v, v) |J| \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(u - v - \mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}(v - \mu_2)^2\right) \end{aligned}$$

U の周辺確率密度関数 $p(u)$ を求める。

$$p(u)$$

$$\begin{aligned}
&= \int s(u, v) dv \\
&= \int \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(u - v - \mu_1)^2\right. \\
&\quad \left.-\frac{1}{2\sigma_2^2}(v - \mu_2)^2\right) dv \\
&= \int \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}((v - \mu_2) - (u - \mu_1 - \mu_2))^2\right. \\
&\quad \left.-\frac{1}{2\sigma_2^2}(v - \mu_2)^2\right) dv \\
&= \int \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2/(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2)}((v - \mu_2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(u - \mu_1 - \mu_2))^2\right) dv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(u - \mu_1 - \mu_2)^2)dv \\
= & \int \frac{1}{\sqrt{2\pi/(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2)}} \\
& \times \exp\left(-\frac{1}{2/(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2)}((v - \mu_2) \right. \\
& \quad \left. -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(u - \mu_1 - \mu_2))^2\right) \\
& \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(u - \mu_1 - \mu_2)^2\right)dv \\
= & \int \frac{1}{\sqrt{2\pi/(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2)}} \\
& \times \exp\left(-\frac{1}{2/(1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2)}((v - \mu_2) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(u - \mu_1 - \mu_2))^2) dv \\
& \times \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(u - \mu_1 - \mu_2)^2\right) \\
& = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(u - \mu_1 - \mu_2)^2\right)
\end{aligned}$$

例： χ^2 分布： X, Y は互いに独立で、 $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$ とするとき、 $U = X + Y \sim \chi^2(n + m)$ となる。

証明：

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x > 0$$