

$$g(y) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2}), \quad y > 0$$

X, Y の結合確率密度関数は, X, Y は互いに独立な確率変数なので,

$$\begin{aligned} & h(x, y) \\ &= f(x)g(y) \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{x}{2}) \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2}) \\ &= C x^{\frac{n}{2}-1} y^{\frac{m}{2}-1} \exp(-\frac{x+y}{2}) \end{aligned}$$

ただし, $C = \frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}} \Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{m}{2})}$ とする。

$U = X + Y, V = Y$ として, 変数変換を行う。

$X = U - V, Y = V$ なので,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

となるので, U, V の結合確率密度関数 $s(u, v)$ は, 変数変換により,

$$\begin{aligned} & s(u, v) \\ &= h(u - v, v) |J| \\ &= C(u - v)^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{m}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \end{aligned}$$

U の周辺確率密度関数は,

$$\begin{aligned} & p(u) \\ &= \int s(u, v) dv \\ &= C \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \int_0^{\infty} (u - v)^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{m}{2}-1} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \int_0^\infty (u - uw)^{\frac{n}{2}-1} (uw)^{\frac{m}{2}-1} u dw \\
&= C u^{\frac{n+m}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \int_0^\infty (1 - w)^{\frac{n}{2}-1} w^{\frac{m}{2}-1} dw \\
&= C B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right) u^{\frac{n+m}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)} u^{\frac{n+m}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{\frac{n+m}{2}} \Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)} u^{\frac{n+m}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}\right)
\end{aligned}$$

$w = \frac{v}{u}$, すなわち, $v = uw$ として置換積分 ($\frac{dv}{dw} = u$ に注意)
 ベータ関数 $B(n, m)$ は

$$B(n, m) = \int_0^\infty (1 - x)^{n-1} x^{m-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

に注意

例： t 分布： X, Y は互いに独立で， $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim \chi^2(n)$ とするとき， $U = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$ となる。

U の密度関数 $f(u)$ は，

$$f(u) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

となる。

証明：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad -\infty < x < \infty$$

$$g(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2}), \quad y > 0$$

X, Y の結合確率密度関数は, X, Y は互いに独立な確率変数なので,

$$\begin{aligned} & h(x, y) \\ &= f(x)g(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2) \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{y}{2} - \frac{1}{2}x^2) \end{aligned}$$

$U = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}, V = Y$ として, 変数変換を行う。

$$X = U\sqrt{\frac{V}{n}}, Y = V \text{ なので,}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{v}{n}} & \frac{u}{2\sqrt{nv}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{v}{n}}$$

となるので, U, V の結合確率密度関数 $s(u, v)$ は, 変数変換により,

$$\begin{aligned} & s(u, v) \\ &= h(u\sqrt{\frac{v}{n}}, v) |J| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{u^2 v}{n}\right) \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} v^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{v}{2}\right) \sqrt{\frac{v}{n}} \\ &= C v^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{v}{2} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

ただし, $C = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n}}$ とする。

U の周辺確率密度関数は,

$$\begin{aligned}
 & p(u) \\
 &= \int s(u, v) dv \\
 &= C \int v^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{v}{2}\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)\right) dv \\
 &= C \int \left(w\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right) \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-1} dw \\
 &= C \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \int w^{\frac{n+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}w\right) dw \\
 &= C \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} 2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})} w^{\frac{n+1}{2}-1} \exp(-\frac{1}{2}w) dw \\
& = C \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} 2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2}) \\
& = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2}) \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \\
& = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}
\end{aligned}$$

$w = v(1 + \frac{u^2}{n})$ として置換積分。

$f(w) = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})} w^{\frac{n+1}{2}-1} \exp(-\frac{1}{2}w)$ は $\chi^2(n+1)$ の密度関数に注意。

例：Cauchy 分布： X, Y は互いに独立で、 $X \sim N(0, 1), Y \sim N(0, 1)$ とするとき、 $U = \frac{X}{Y}$ は Cauchy 分布となる。
 U の密度関数 $f(u)$ は、

$$f(u) = \frac{1}{\pi(1 + u^2)}$$

となる。

証明：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad -\infty < x < \infty$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right), \quad -\infty < y < \infty$$

X, Y の結合確率密度関数は, X, Y は互いに独立な確率変数なので,

$$\begin{aligned} & h(x, y) \\ &= f(x)g(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) \end{aligned}$$

$u = \frac{x}{y}, v = y$ として, 変数変換を行う。

$x = uv, y = v$ なので,

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

となるので, U, V の結合確率密度関数 $s(u, v)$ は, 変数変換により,

$$s(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&= h(uv, v)|J| \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)\right)|v|
\end{aligned}$$

U の周辺確率密度関数は,

$$\begin{aligned}
&p(u) \\
&= \int s(u, v)dv \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v| \exp\left(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)\right)dv \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} v \exp\left(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)\right)dv \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{1+u^2} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2)\right) \right]_{v=0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\pi(1+u^2)}
\end{aligned}$$

5 積率と積率母関数

5.1 積率母関数 (1 変数)

確率変数 X について,

積率: $\mu'_n = E(X^n) \implies$ 原点のまわりの n 次の積率

積率母関数: $\phi(\theta) = E(e^{\theta X})$

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= E(e^{\theta X}) \\ &= \begin{cases} \sum e^{\theta a_i} f(a_i), & \text{離散型} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx, & \text{連続型} \end{cases}\end{aligned}$$

性質:

$$1. \phi^{(n)}(0) = \mu'_n \equiv E(X^n)$$

証明: