$\phi(\theta)$ を $\theta = 0$ のまわりで，テーラー展開を行う。

$$
\begin{aligned}
&\phi(\theta) \\
&= \mathrm{E}\left(1 + \frac{X}{1!}\theta + \frac{X^2}{2!}\theta^2 + \cdots + \frac{X^n}{n!}\theta^n + \cdots\right) \\
&= 1 + \frac{\mathrm{E}(X)}{1!}\theta + \frac{\mathrm{E}(X^2)}{2!}\theta^2 + \cdots + \frac{\mathrm{E}(X^n)}{n!}\theta^n + \cdots \\
&= 1 + \frac{\mu'_1}{1!}\theta + \frac{\mu'_2}{2!}\theta^2 + \cdots + \frac{\mu'_n}{n!}\theta^n + \cdots
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\phi^{(n)}(\theta) = \mu'_n + \frac{\mu'_{n+1}}{1!}\theta + \frac{\mu'_{n+2}}{2!}\theta^2 + \cdots
$$

より，$\phi^{(n)}(0) = \mu'_n \equiv \mathrm{E}(X^n)$

注)

関数 $f(x)$ の $x = x_0$ の回りでテーラー展開

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

ただし，$f^{(k)}(x_0)$ は $f(x)$ の k 回微分を $x = x_0$ で評価したものとする。

2. 確率変数 X の積率母関数と確率変数 Y の積率母関数は一致するとき，確率変数 X の分布関数と確率変数 Y の分布関数も一致する。

3. 互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の積率母関数を $\phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \cdots, \phi_n(\theta)$ とするとき，$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の積率母関数は $\phi_1(\theta)\phi_2(\theta) \cdots \phi_n(\theta)$ となる。

証明：

$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ として，Y の積率母関数 $\phi_y(\theta)$ は

$$\begin{aligned}
\phi_y(\theta) &= \mathrm{E}(e^{\theta Y}) \\
&= \mathrm{E}(e^{\theta(X_1+X_2+\cdots+X_n)}) \\
&= \mathrm{E}(e^{\theta X_1})\mathrm{E}(e^{\theta X_2})\cdots\mathrm{E}(e^{\theta X_n}) \\
&= \phi_1(\theta)\phi_2(\theta)\cdots\phi_n(\theta)
\end{aligned}$$

4. 互いに独立な確率変数 X_1, X_2, $\cdots$, X_n が同一の分布に従い，その積率母関数を $\phi(\theta)$ とするとき，$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の積率母関数は $(\phi(\theta))^n$ となる。

ベルヌイ分布の積率母関数： $\phi(\theta) = pe^{\theta} + (1-p)$

ベルヌイ分布

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

積率母関数

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= \sum_{x=0}^{1} e^{\theta x} f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{1} e^{\theta x} p^x (1-p)^{1-x} \\ &= e^{\theta} p + 1 - p\end{aligned}$$

1. 平均：

$\mathrm{E}(X) = \phi'(0)$

$\phi(\theta) = e^{\theta} p + 1 - p,$

$\phi'(\theta) = pe^{\theta}$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \phi'(0) \\ &= p\end{aligned}$$

2. 分散：

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$ なので，$\mathrm{E}(X^2)$ を求める。

$\mathrm{E}(X^2) = \phi''(0)$

$\phi''(\theta) = pe^\theta$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \\ &= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p)\end{aligned}$$

二項分布の積率母関数： $\phi(\theta) = (pe^\theta + (1-p))^n$

二項分布

$$f(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n$$

積率母関数

$$
\begin{aligned}
\phi(\theta) &= \sum_{x=0}^{n} e^{\theta x} f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} e^{\theta x} {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x (e^{\theta} p)^x (1-p)^{n-x} \\
&= (e^{\theta} p + 1 - p)^n
\end{aligned}
$$

(二項定理より)

1. 平均：

$$\mathrm{E}(X) = \phi'(0)$$

$$\phi(\theta) = (e^{\theta} p + 1 - p)^n,$$

$\phi'(\theta) = npe^{\theta}(e^{\theta}p + 1 - p)^{n-1}$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \phi'(0) \\ &= np\end{aligned}$$

2. 分散：

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$ なので，$\mathrm{E}(X^2)$ を求める。

$\mathrm{E}(X^2) = \phi''(0)$

$\phi''(\theta) = npe^{\theta}(e^{\theta}p + 1 - p)^{n-1} + n(n-1)p^2e^{2\theta}(e^{\theta}p + 1 - p)^{n-2}$
なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \\ &= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\ &= np + n(n-1)p^2 - (np)^2 \\ &= np(1-p)\end{aligned}$$

ポアソン分布の積率母関数： $\phi(\theta) = \exp(\lambda(e^{\theta} - 1))$

ポアソン分布

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \cdots$$

積率母関数

$$\begin{aligned}
\phi(\theta) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{(e^{\theta}\lambda)^x}{x!} \\
&= \exp(-\lambda)\exp(e^{\theta}\lambda) \\
&= \exp(\lambda(e^{\theta} - 1))
\end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}$$ に注意

1. 平均：

$\mathrm{E}(X) = \phi'(0)$

$\phi(\theta) = \exp(\lambda(e^{\theta} - 1))$,

$\phi'(\theta) = \lambda e^{\theta} \exp(\lambda(e^{\theta} - 1))$ なので，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \phi'(0) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

2. 分散：

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$ なので，$\mathrm{E}(X^2)$ を求める。

$\mathrm{E}(X^2) = \phi''(0)$

$$\phi''(\theta) = (1+\lambda e^{\theta})\lambda e^{\theta}\exp(\lambda(e^{\theta}-1))$$ なので，

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \\
&= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\
&= (1+\lambda)\lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

正規分布の積率母関数： $$\phi(\theta) = \exp(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$$

正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

積率母関数

$$\phi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2+\theta x} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2(\mu+\sigma^2\theta)x+\mu^2\right)} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\mu+\sigma^2\theta)\right)^2+(\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)} \mathrm{d}x \\
&= e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\mu+\sigma^2\theta)\right)^2} \mathrm{d}x \\
&= \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)
\end{aligned}
$$

積分のところは，$N(\mu+\sigma^2\theta, \sigma^2)$ の確率密度関数に注意

1. 平均：

$\mathbf{E}(\boldsymbol{X}) = \phi'(0)$

$\phi(\theta) = \exp(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$,

$\phi'(\theta) = (\mu + \sigma^2\theta)\exp(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$ なので，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\boldsymbol{X}) &= \phi'(0)\\ &= \mu\end{aligned}$$

2. 分散：

$\mathbf{V}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{X}^2) - (\mathbf{E}(\boldsymbol{X}))^2$ なので，$\mathbf{E}(\boldsymbol{X}^2)$ を求める。

$\mathbf{E}(\boldsymbol{X}^2) = \phi''(0)$

$\phi''(\theta) = \sigma^2\exp(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2) + (\mu + \sigma^2\theta)^2\exp(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)$ なので，

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{X}^2) - (\mathbf{E}(\boldsymbol{X}))^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\
&= (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

一様分布の積率母関数： $\phi(\theta) = \dfrac{e^{b\theta} - e^{a\theta}}{\theta(b-a)}$

一様分布

$$
f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b
$$

積率母関数

$$
\begin{aligned}
\phi(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_{a}^{b} e^{\theta x} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= \left[\frac{e^{\theta x}}{\theta(b-a)} \right]_a^b$$

$$= \frac{e^{\theta b} - e^{\theta a}}{\theta(b-a)}$$

1. 平均：

$$\mathbf{E}(X) = \phi'(0)$$

$$\phi(\theta) = \frac{e^{\theta b} - e^{\theta a}}{\theta(b-a)},$$

$$\phi'(\theta) = \frac{be^{\theta b} - ae^{\theta a}}{\theta(b-a)} - \frac{e^{\theta b} - e^{\theta a}}{\theta^2(b-a)} = \frac{\theta(be^{\theta b} - ae^{\theta a}) - (e^{\theta b} - e^{\theta a})}{\theta^2(b-a)}$$

となり，$\phi'(0) = \frac{0}{0}$ となるので，ロピタルの定理を利用する。

(*) ロピタルの定理

ある連続関数 $f(x)$ と $g(x)$ について，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{ or }\ \frac{0}{0},\qquad \text{または，}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{ or }\ \frac{0}{0}$$

となるとき，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},\qquad \text{または，}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となる。

この場合，

$$\phi'(\theta) = \frac{\theta(be^{\theta b} - ae^{\theta a}) - (e^{\theta b} - e^{\theta a})}{\theta^2(b-a)} = \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$$

$f(0) = 0$，$g(0) = 0$ となる。分子分母別々に微分すると，

$$f'(\theta) = \theta(b^2e^{\theta b} - a^2e^{\theta a})$$
$$g'(\theta) = 2\theta(b-a)$$

となる。

$$\begin{aligned}\phi'(0) &= \lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)} \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{b^2e^{\theta b} - a^2e^{\theta a}}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}\end{aligned}$$

2. 分散：

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2$ なので，$\mathrm{E}(X^2)$ を求める。

$\mathrm{E}(X^2) = \phi''(0)$ なので，$\phi''(\theta)$ は，

$$\begin{aligned}\phi''(\theta) &= \frac{\theta(b^2e^{\theta b} - a^2e^{\theta a})}{\theta^2(b-a)} - \frac{2\theta(be^{\theta b} - ae^{\theta a}) - 2(e^{\theta b} - e^{\theta a})}{\theta^3(b-a)} \\ &= \frac{\theta^2(b^2e^{\theta b} - a^2e^{\theta a}) - 2\theta(be^{\theta b} - ae^{\theta a}) + 2(e^{\theta b} - e^{\theta a})}{\theta^3(b-a)}\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \theta^2(b^2e^{\theta b} - a^2e^{\theta a}) - 2\theta(be^{\theta b} - ae^{\theta a}) + 2(e^{\theta b} - e^{\theta a}) \\ g(\theta) &= \theta^3(b-a)\end{aligned}$$

とすると，$f(0) = 0$，$g(0) = 0$ なので，ロピタルの定理を当てはめる。

$$f'(\theta) = \theta^2(b^3e^{\theta b} - a^3e^{\theta a})$$
$$g'(\theta) = 3\theta^2(b - a)$$

なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) = \phi''(0) &= \lim_{\theta\to 0}\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{b^3e^{\theta b} - a^3e^{\theta a}}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}\end{aligned}$$

となる。よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \phi''(0) - (\phi'(0))^2\\ &= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}$$

指数分布の積率母関数： $\boldsymbol{\phi(\theta) = \dfrac{\lambda}{\lambda - \theta}}$

指数分布

$$\boldsymbol{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 < x}$$

積率母関数

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\phi(\theta)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e^{\theta x} f(x) \mathrm{d}x} \\
&= \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{e^{\theta x} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x} \\
&= \boldsymbol{\frac{\lambda}{\lambda - \theta}} \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{(\lambda - \theta) e^{-(\lambda - \theta) x} \mathrm{d}x} \\
&= \boldsymbol{\frac{\lambda}{\lambda - \theta}}
\end{aligned}$$

積分のところは，パラメータ $\boldsymbol{\lambda - \theta}$ の指数分布に注意

1. 平均：

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{X}) = \phi'(\mathbf{0})$$

$$\phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\theta}},$$

$$\phi'(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\theta})^2}$$ なので，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\boldsymbol{X}) &= \phi'(\mathbf{0}) \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}\end{aligned}$$

2. 分散：

$\mathbf{V}(\boldsymbol{X}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{X}^2) - (\mathbf{E}(\boldsymbol{X}))^2$ なので，$\mathbf{E}(\boldsymbol{X}^2)$ を求める。

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{X}^2) = \phi''(\mathbf{0})$$

$$\phi''(\theta) = 2\frac{\lambda}{(\lambda-\theta)^3}$$ なので，

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \\ &= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

χ^2 分布の積率母関数：　$\phi(\theta) = (\frac{1}{1-2\theta})^{\frac{n}{2}}$

$\chi^2(n)$ 分布

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}\exp(-\frac{x}{2}), \quad 0 < x$$