

積率母関数

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx \\&= \int_0^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{x}{2}) dx \\&= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(1-2\theta)x\right) dx \\&= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{y}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{1}{2}y) \frac{1}{1-2\theta} dy \\&= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{1}{2}y) dy \\&= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}}\end{aligned}$$

$y = (1 - 2\theta)x$ として変数変換 ($\frac{dx}{dy} = (1 - 2\theta)^{-1}$)
積分のところは、自由度 n の $\chi^2(n)$ 分布に注意

1. 平均：

$$E(X) = \phi'(0)$$

$$\phi(\theta) = (1 - 2\theta)^{-\frac{n}{2}},$$

$$\phi'(\theta) = (-\frac{n}{2})(-2)(1 - 2\theta)^{-\frac{n}{2}-1} \text{ なので,}$$

$$E(X) = \phi'(0)$$

$$= n$$

2. 分散：

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ なので, } E(X^2) \text{ を求める。}$$

$$E(X^2) = \phi''(0)$$

$$\phi''(\theta) = \left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2} - 1\right)(-2)^2(1 - 2\theta)^{-\frac{n}{2}-1} \text{ なので,}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\ &= n(n+2) - n^2 \\ &= 2n \end{aligned}$$

例題：ベルヌイ分布の和の分布： $X_1, X_2, \dots, X_n$ はそれぞれ独立に同一のベルヌイ分布に従うものとする。このとき、 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ は二項分布 $b(y; n, p)$ に従う。

証明：

$P(X_i = 1) = p$ のとき、 X_i の積率母関数 $\phi_i(\theta)$ は、

$$\phi_i(\theta) = pe^{\theta} + 1 - p$$

Y の積率母関数 $\phi_y(\theta)$ は,

$$\begin{aligned}\phi_y(\theta) &= E(e^{\theta Y}) \\ &= E(e^{\theta(X_1+X_2+\cdots+X_n)}) \\ &= E(e^{\theta X_1})E(e^{\theta X_2})\cdots E(e^{\theta X_n}) \\ &= \phi_1(\theta)\phi_2(\theta)\cdots\phi_n(\theta) \\ &= (\phi(\theta))^n \\ &= (pe^{\theta} + 1 - p)^n\end{aligned}$$

これは、二項分布 $b(y; n, p)$ の積率母関数に一致する。

注)

3つ目の等式は、 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ はそれぞれ独立であるため。

5つ目の等式は、 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は同一の分布に従うため。

例題：正規分布の和の分布： X, Y はたがいに独立な確率変数で、 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ とする。このとき、定数 a, b について、 $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ となる。

証明：

X, Y の積率母関数 $\phi_x(\theta), \phi_y(\theta)$ は、

$$\phi_x(\theta) = \exp(\mu_1\theta + \frac{1}{2}\sigma_1^2\theta^2)$$

$$\phi_y(\theta) = \exp(\mu_2\theta + \frac{1}{2}\sigma_2^2\theta^2)$$

$W = aX + bY$ の積率母関数 $\phi_w(\theta)$ は、

$$\begin{aligned}\phi_w(\theta) &= \mathbf{E}(e^{\theta W}) \\ &= \mathbf{E}(e^{\theta(aX+bY)}) \\ &= \mathbf{E}(e^{a\theta X})\mathbf{E}(e^{b\theta Y}) \\ &= \phi_x(a\theta)\phi_y(b\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(\mu_1(a\theta) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(a\theta)^2) \\
&\times \exp(\mu_2(b\theta) + \frac{1}{2}\sigma_2^2(b\theta)^2) \\
&= \exp((a\mu_1 + b\mu_2)\theta + \frac{1}{2}(a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)\theta^2)
\end{aligned}$$

これは、平均 $a\mu_1 + b\mu_2$ ，分散 $a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$ の正規分布の積率母関数に一致する。

よって、 $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ となる。

例題： χ^2 分布の和の分布 X, Y は互いに独立で、 $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$ とするとき、 $Z = X + Y \sim \chi^2(n + m)$ となる。

証明：

X, Y の積率母関数 $\phi_x(\theta), \phi_y(\theta)$ とする。このとき、 $\phi_x(\theta), \phi_y(\theta)$ はそ

れぞれ,

$$\phi_x(\theta) = \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}},$$

$$\phi_y(\theta) = \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}},$$

となる。 $Z = X + Y$ の積率母関数 $\phi_z(t)$ は, X, Y は互いに独立な確率変数なので,

$$\begin{aligned}\phi_z(\theta) &\equiv \mathbf{E}(e^{\theta Z}) \\ &= \mathbf{E}(e^{\theta(X+Y)}) \\ &= \mathbf{E}(e^{\theta X})\mathbf{E}(e^{\theta Y}) \\ &= \phi_x(\theta)\phi_y(\theta) \\ &= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{1 - 2\theta} \right)^{\frac{n+m}{2}}$$

これは、自由度 $n + m$ の χ^2 分布の積率母関数に等しい。したがって、 $Z \sim \chi^2(n + m)$ となる。

ただし、3 つ目の等号が成り立つ理由は、 X と Y は独立な確率変数であるためである。

5.2 積率母関数 (多変数)

確率変数 X, Y について、

積率母関数： $\phi(\theta_1, \theta_2) = E(e^{\theta_1 X + \theta_2 Y})$

性質：

1. 多変数の積率

$$\frac{\partial^{j+k} \phi(0, 0)}{\partial \theta_1^j \partial \theta_2^k} = E(X^j Y^k)$$

2. (X_1, Y_1) の積率母関数と (X_2, Y_2) の積率母関数が一致すれば, (X_1, Y_1) の分布関数と (X_2, Y_2) の分布関数も一致する。

3. (X, Y) の積率母関数 $\phi(\theta_1, \theta_2)$,
 X の積率母関数 $\phi_1(\theta_1)$,
 Y の積率母関数 $\phi_2(\theta_2)$ について,

$$\phi_1(\theta_1) = \phi(\theta_1, 0), \quad \phi_2(\theta_2) = \phi(0, \theta_2)$$

4. (X, Y) の積率母関数 $\phi(\theta_1, \theta_2)$,
 X の積率母関数 $\phi_1(\theta_1)$,

Y の積率母関数 $\phi_2(\theta_2)$ について,
 X と Y が独立であるための条件は,

$$\phi(\theta_1, \theta_2) = \phi_1(\theta_1)\phi_2(\theta_2)$$

確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ について,
積率母関数: $\phi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = E(e^{\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \dots + \theta_n X_n})$

2 変数正規分布の積率母関数: (X, Y) の確率密度関数

$$\begin{aligned} & f(x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ & \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right.\right. \\ & \quad \left.\left.-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right.\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \Big) \\
& = \frac{1}{2\pi} \left| \begin{array}{cc} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{array} \right|^{-1} \\
& \times \exp \left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{pmatrix} \right) \\
& = \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} x' \Sigma^{-1} x \right)
\end{aligned}$$

積率母関数

$$\begin{aligned}
& \phi(\theta_1, \theta_2) \\
& = \mathbf{E}(e^{\theta_1 X + \theta_2 Y}) \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta_1 x + \theta_2 y} f(x, y) dx dy \\
& = \iint e^{\theta_1(x - \mu_1) + \theta_2(y - \mu_2) + \theta_1 \mu_1 + \theta_2 \mu_2} f(x, y) dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint \exp\left(\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\right) \\
&\quad \times f(x, y) dx dy \\
&= \int \exp(\theta'x + \theta'\mu) f(x) dx \\
&= \int \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} x' \Sigma^{-1} x + \theta'x + \theta'\mu\right) dx \\
&= \int \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - \theta)' \Sigma^{-1} (x - \theta) \right. \\
&\quad \left. + \theta'\mu + \frac{1}{2} \theta' \Sigma \theta\right) dx \\
&= \exp(\theta'\mu + \frac{1}{2} \theta' \Sigma \theta) \\
&\times \int \frac{1}{2\pi} |\Sigma|^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - \theta)' \Sigma^{-1} (x - \theta)\right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(\theta' \mu + \frac{1}{2} \theta' \Sigma \theta) \\
&= \exp(\mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2 + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 \theta_1^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 \rho \theta_1 \theta_2 + \sigma_2^2 \theta_2^2))
\end{aligned}$$

ただし,

$$f(x) = f(x, y),$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x - \mu_1 \\ y - \mu_2 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

とする。

$$1. E(X) = \frac{\partial \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} \Big|_{(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)}$$

$$2. E(Y) = \frac{\partial \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} \Big|_{(\theta_1, \theta_2) = (0,0)}$$

$$3. E(X^2) = \frac{\partial^2 \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1^2} \Big|_{(\theta_1, \theta_2) = (0,0)}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$4. E(Y^2) = \frac{\partial^2 \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2^2} \Big|_{(\theta_1, \theta_2) = (0,0)}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$5. E(XY) = \frac{\partial^2 \phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \Big|_{(\theta_1, \theta_2) = (0,0)}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$