6　大数の法則と中心極限定理

6.1　Chebyshev の不等式

$g(x) \geq 0$ について，

$$P(g(X) \geq k) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{k}$$

となる。ただし，k は正の定数とする。

証明：

$g(X) \geq k$ のとき $U = 1$，$g(X) < k$ のとき $U = 0$ となる離散型確率変数 U を導入する。

離散型確率変数 U は 0 か 1 の値を取り，その確率関数 $f(u)$ は次のように与えられる。

$$f(u) = P(U = u)$$

ただし，

$$P(U=1)=P(g(X)\geq k)$$
$$P(U=0)=P(g(X)<k)$$

となる。
このとき，常に，以下の式が成り立つ。

$$g(X)\geq kU$$

よって，両辺に期待値を取ると，

$$\mathrm{E}(g(X))\geq k\mathrm{E}(U)$$

となる。$\mathrm{E}(U)$ を求める。

$$\mathrm{E}(U)=\sum_{u=0}^{1}uP(U=u)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \times P(U = 1) + 0 \times P(U = 0) \\
&= 1 \times P(g(X) \geq k) + 0 \times P(g(X) < k) \\
&= P(g(X) \geq k)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$\mathrm{E}(g(X)) \geq kP(g(X) \geq k)$$

から，

$$P(g(X) \geq k) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{k}$$

を得る。

代表的な例：　$\mathrm{E}(X) = \mu$, $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$, $\lambda > 1$ を任意の定数とする。このとき，

$$P(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P(|X-\mu|<\lambda\sigma) \geq 1-\frac{1}{\lambda^2}$$

となる。

証明：

$g(X)=(X-\mu)^2$, $k=\lambda^2\sigma^2$ とすると，

$$P(g(X)\geq k) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{k}$$

から，

$$P((X-\mu)^2 \geq \lambda^2\sigma^2) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2\sigma^2}$$

$$P(|X-\mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{1}{\lambda^2}$$