

を得る。

さらに、 $\epsilon = \lambda\sigma$ とすると、

$$P(|X - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

とも書き表される。

6.2 大数の (弱) 法則 (Convergence in probability)

$X_1, X_2, \dots, X_n$ が互いに独立な確率変数ですべて同じ分布に従うとし、すべての i について $E(X_i) = \mu$ とする。このとき任意の正数 ϵ について、 $n \longrightarrow \infty$ のとき、

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \longrightarrow 0$$

が成り立つ。ただし,

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

とする。

このとき, $\overline{X}_n$ は μ に確率収束するという。

証明:

$$E(\overline{X}_n) = \mu, \quad V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{なので,}$$

$$P(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

が成り立つ。したがって, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$P(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \rightarrow 0$$

となる。すなわち、 $\overline{X}_n \longrightarrow \mu$ が得られる。

系：また、 $X_1, X_2, \dots, X_n$ が同じ分布に従わなくても、独立性もなくても、

$$m_n = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right),$$

$$V_n = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right),$$

が存在し、 $n \longrightarrow \infty$ のとき、

$$\frac{V_n}{n^2} \longrightarrow 0$$

が成り立てば、

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - m_n}{n} \longrightarrow 0$$

が成り立つ。(証明略)

2 つとも、大数の (弱) 法則と呼ばれる。

6.3 中心極限定理

$X_1, X_2, \dots, X_n$ が互いに独立な確率変数ですべて同じ分布に従うとし、すべての i について $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ とする。以上の仮定のもとで、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < x\right) \longrightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

が成り立つ。 $\Rightarrow$ 中心極限定理

証明：

$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ と Y_i を定義する。

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$$

一方、 $E(Y_i) = 0$, $V(Y_i) = 1$ を利用して、 Y_i の積率母関数は、

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &\equiv E(e^{Y_i\theta}) \\ &= E\left(1 + Y_i\theta + \frac{1}{2}Y_i^2\theta^2 + \frac{1}{3!}Y_i^3\theta^3 \dots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\theta^2 + O(\theta^3)\end{aligned}$$

となる。 $(\theta = 0$ の回りで、 $e^{Y_i\theta}$ をテーラー展開する。)

$Z = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$ の積率母関数 $\Phi(\theta)$ は、

$$\begin{aligned}\Phi(\theta) &= E(e^{Z\theta}) \\ &= E\left(e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^n \mathbf{E} \left(e^{\frac{\theta}{\sqrt{n}} Y_i} \right) \\
&= \prod_{i=1}^n \phi_i \left(\frac{\theta}{\sqrt{n}} \right) \\
&= \left(\phi \left(\frac{\theta}{\sqrt{n}} \right) \right)^n \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{n} + O\left(\frac{\theta^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right)^n \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{n} + O(n^{-\frac{3}{2}}) \right)^n
\end{aligned}$$

注)

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ はそれぞれ独立で、同じ分布関数を持つので、積率母関数

は同じになる。すなわち，

$$\phi_1(\theta) = \phi_2(\theta) = \cdots = \phi_n(\theta) = \phi(\theta)$$

となる。

さらに， $x = \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{n} + O(n^{-\frac{3}{2}})$ とおき， $\frac{n}{x}$ を両辺に掛けて，

$n = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} \theta^2 + O(n^{-\frac{1}{2}}) \right)$ を代入する。

$$\begin{aligned}\Phi(\theta) &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\theta^2}{n} + O(n^{-\frac{3}{2}}) \right)^n \\ &= (1 + x)^{\frac{1}{x} \left(\frac{\theta^2}{2} + O(n^{-\frac{1}{2}}) \right)} \\ &= \left((1 + x)^{\frac{1}{x}} \right)^{\frac{\theta^2}{2} + O(n^{-\frac{1}{2}})} \longrightarrow e^{\frac{\theta^2}{2}}\end{aligned}$$

$n \longrightarrow \infty$ のとき， $x \longrightarrow 0$ となる。

注)

e の定義について,

$$\begin{aligned} e &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h \\ &= 2.71828182845905 \end{aligned}$$

に注意。

$e^{\frac{\theta^2}{2}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の積率母関数であるので,

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < x\right) \longrightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

が成り立つ。

系: $X_1, X_2, \dots, X_n$ が同じ分布に従わなくても, 独立性もなくても, $n \longrightarrow \infty$ のとき,

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - E(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{V(\sum_{i=1}^n X_i)}} < x\right)$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

が成り立つ。(証明略)

7 大数の強法則 (Almost sure convergence)

大数の強法則 (その1): $X_1, X_2, \dots, X_n$ が互いに独立な確率変数ですべて同じ分布に従うとし, すべての i について $E(X_i) = \mu$ とする。このとき,

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}_n = \mu\right) = 1$$

ただし, $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とする。

大数の強法則 (その2): $X_1, X_2, \dots, X_n$ が互いに独立な確率変数で, 平均と分散が存在するものとする (同一の分布に従わなくてもよい)。 $V(X_i) = \sigma_i^2$,