

$$= - \frac{1}{\mathbf{E} \left(\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta^2} \right)}$$

とする。

等号が成り立つ $\hat{\theta}_n$ が存在するとき， $\hat{\theta}_n$ は最小分散の不偏推定量である。

⇒ 有効推定量

クラメール・ラオの不等式の証明：

まず，準備として，尤度関数 $l(\theta; x) = l(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)$ は $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の結合密度関数なので，その積分値は1となる。

尤度関数については，後述。

すなわち，

$$1 = \int l(\theta; x) dx$$

を得る。

ただし、 $l(\theta; x) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ とする。

$\int \cdots dx$ は n 重積分を意味するものとする。

両辺を θ で微分して整理する。

$$\begin{aligned} 0 &= \int \frac{\partial l(\theta; x)}{\partial \theta} dx \\ &= \int \frac{1}{l(\theta; x)} \frac{\partial l(\theta; x)}{\partial \theta} l(\theta; x) dx \\ &= \int \frac{\partial \log l(\theta; x)}{\partial \theta} l(\theta; x) dx \\ &= \mathbf{E} \left[\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

これは $\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta}$ の期待値はゼロを意味する。

3行目では, $\frac{d \log f(x)}{dx} = \frac{d \log f(x)}{df(x)} \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$ に注意。

今, θ の推定量を $\hat{\theta}_n$ とおく。

$$E(\hat{\theta}_n) = \int \hat{\theta}_n l(\theta; x) dx$$

θ について微分

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \\ &= \int \hat{\theta}_n \frac{\partial l(\theta; x)}{\partial \theta} dx \\ &= \int \hat{\theta}_n \frac{\partial \log l(\theta; x)}{\partial \theta} l(\theta; x) dx \\ &= \int (\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)) \left(\frac{\partial \log l(\theta; x)}{\partial \theta} - E\left(\frac{\partial \log l(\theta; x)}{\partial \theta}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\times l(\theta; x) dx$$

$$= \text{Cov} \left(\hat{\theta}_n, \frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)$$

簡単化のために、 $\hat{\theta}_n$, θ をスカラーとする。

このとき、

$$\left(\frac{\partial \mathbb{E}(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \right)^2$$

$$= \left[\text{Cov} \left(\hat{\theta}_n, \frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right) \right]^2$$

$$= \rho^2 \mathbf{V}(\hat{\theta}_n) \mathbf{V} \left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)$$

$$\leq \mathbf{V}(\hat{\theta}_n) \mathbf{V} \left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)$$

ただし、 ρ は $\hat{\theta}_n$ と $\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta}$ との相関係数とする。すなわち、 $-1 \leq \rho \leq 1$ で、その定義は、

$$\rho = \frac{\text{Cov} \left(\hat{\theta}_n, \frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)}{\sqrt{\text{V}(\hat{\theta}_n)} \sqrt{\text{V} \left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)}}$$

となる。よって、

$$\left(\frac{\partial \text{E}(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \right)^2 \leq \text{V}(\hat{\theta}_n) \text{V} \left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)$$

すなわち,

$$V(\hat{\theta}_n) \geq \frac{\left(\frac{\partial E(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \right)^2}{V\left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)}$$

$E(\hat{\theta}_n) = \theta$ のとき,

$$\begin{aligned} V(\hat{\theta}_n) &\geq \frac{\left(\frac{\partial E(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \right)^2}{V\left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)} \\ &= \frac{1}{V\left(\frac{\partial \log l(\theta; X)}{\partial \theta} \right)} \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}& \mathbf{V} \left(\frac{\partial \log l(\theta; \mathbf{X})}{\partial \theta} \right) \\&= \mathbf{V} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta} \right) \\&= \sum_{i=1}^n \mathbf{V} \left(\frac{\partial \log f(X_i; \theta)}{\partial \theta} \right) \quad (\text{互いに独立により}) \\&= \sum_{i=1}^n \mathbf{V} \left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right) \\&= n \mathbf{V} \left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right) \quad (\text{同一の分布により}) \\&= n \mathbf{E} \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

$$= n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) dx$$

$\int f(x; \theta) dx = 1$ から, $E \left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right) = 0$ となるので, 5 つ目の等号が成り立つ。

したがって,

$$V(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{n E \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]} = \frac{\sigma^2(\theta)}{n}$$

となる。

次に,

$$- E \left(\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E} \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\
&= \mathbf{V} \left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

を証明する。

$$\int f(x; \theta) dx = 1$$

θ について微分

$$\int \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx = 0$$

(x の範囲は θ に依存しないもの、微分 $\partial f(x; \theta) / \partial \theta$ が存在するものと仮定される)

上式の変形により

$$\int \frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} f(x; \theta) dx = 0$$

すなわち,

$$E \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right) = 0$$

さらに, θ について微分

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial^2 \log f(x; \theta)}{\partial \theta^2} f(x; \theta) dx \\ & + \int \frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx \\ & = \int \frac{\partial^2 \log f(x; \theta)}{\partial \theta^2} f(x; \theta) dx \\ & + \int \left(\frac{\partial \log f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(x; \theta) dx \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}& -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta \partial \theta'}\right) \\&= \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] \\&= \mathrm{V}\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta}\right)\end{aligned}$$

を得る。

したがって,

$$\sigma^2(\theta) = \frac{1}{\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

$$= -\frac{1}{\mathbf{E}\left(\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta^2}\right)}$$

となる。

例： $X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立で、すべて同一の正規分布（すなわち、平均 μ 、分散 σ^2 ですべて同一の分布）に従うものとする。ただし、 σ^2 は既知とする。このとき、 μ の推定量 $\bar{X}$ は有効推定量である。

証明：

$V(\bar{X})$ は分布形にかかわらず、 $\sigma^2 < \infty$ のとき、 $\frac{\sigma^2}{n}$ となる。 (A)
一方、

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$$

なので、クラメール・ラオの不等式は、この場合、

$$V(\bar{X}) \geq \frac{1}{nE \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \mu)}{\partial \mu} \right)^2 \right]}$$

となる。

$$\log f(X; \mu) = -\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(X - \mu)^2$$

なので、

$$\frac{\partial \log f(X; \mu)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}(X - \mu)$$

となる。

したがって、

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &\geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{1}{\sigma^2}(X - \mu)\right)^2\right]} \\ &= \frac{1}{n\frac{1}{\sigma^4}E[(X - \mu)^2]} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

となる。 (B)

(A) と (B) より、 $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ (クラメール・ラオの不等式の下限) が成り立つので、 $\bar{X}$ は有効推定量であると言える。

十分性 (充分性, 充足性): $X_1, X_2, \dots, X_n$ の同時密度関数が、

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \\ = h(x_1, x_2, \dots, x_n)g(\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n); \theta)$$

と分解できるとき、 $\hat{\theta}_n \equiv \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ は θ の十分推定量であるという。

すなわち、

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

が成り立つとき ($\hat{\theta}_n$ を与えたときの $X_1, X_2, \dots, X_n$ の条件付き分布が母数 θ に依存しないとき), $\hat{\theta}_n \equiv \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ は θ の十分推定量となる。

$\Rightarrow$ 標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ に含まれている θ に関する情報は、すべて $\hat{\theta}_n$ に含まれている。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立で、すべて同一の正規分布 (すなわち、平均

μ , 分散 σ^2 ですべて同一の分布) に従うものとする。ただし, σ^2 は既知とする。このとき, $\bar{X}$ は十分推定量である。

証明:

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \\ &\times \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{2\pi}\sigma)^{n-1}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right) \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2/n} (\bar{x} - \mu)^2\right) \\
&= h(x_1, x_2, \dots, x_n) g(\bar{x}; \mu)
\end{aligned}$$

以上のように，分解可能である。

したがって， $\bar{X}$ は十分推定量である。

十分推定量の補足

Rao-Blackwell の定理：

t を θ の十分統計量， $\hat{\theta}_n$ を θ の不偏推定量とする。このとき， $E(\hat{\theta}_n|t)$ は θ の不偏推定量で，しかも， $\hat{\theta}_n$ よりも分散は小さい。

$\implies$ 任意の不偏推定量 $\hat{\theta}_n$ について， $\hat{\theta}_n = v(t)$ でない限り（不偏推定量 $\hat{\theta}_n$ が t だけの関数でない限り）， $v(t) = E(\hat{\theta}_n|t)$ を作ることにより改善さ

れる。

どの $\hat{\theta}_n$ に対しても、同じ $v(t)$ が一意に決まれば、それ以上の改善は出来ないので、 $v(t)$ は θ のあらゆる不偏推定量の中で最小な分散を持つことになる。

$\implies v(t)$ は有効推定量

一貫性： n が大きくなるにつれて、任意の $\epsilon > 0$ について、

$$P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty$$

となるとき、 $\hat{\theta}_n$ は θ の一致推定量であるという。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立で、すべて同一の正規分布 (すなわち、平均 μ , 分散 σ^2 ですべて同一の分布) に従うものとする。ただし、 σ^2 は既知とする。このとき、 $\bar{X}$ は一致推定量である。

証明：

チェビシェフの不等式：

$$P(|X - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

ただし、 $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$ とする。

ここで、 X を $\bar{X}$ にして、 $E(\bar{X})$, $V(\bar{X})$ を求める。

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

を得る。

したがって、 $n \longrightarrow \infty$ のとき、

$$P(|\bar{X} - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \longrightarrow 0$$

となる。

よって、 $\overline{X}$ は μ の一致推定量である。

定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta \quad (\text{漸近的 unbiased})$$

かつ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$$

のとき、 $\hat{\theta}_n$ は θ の一致推定量となる。

8.3 推定量の求め方：最尤法，積率法，最小二乗法

8.3.1 最尤法

標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ の密度関数：

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

θ は未知母数 $\implies \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ によって推定

$$l(\theta) = l(\theta; x) = l(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

のように、 θ の関数として考える。

$l(\theta)$ ：尤度関数

尤度関数を最大にする θ を $\hat{\theta}_n$ とする。

$\hat{\theta}_n \equiv \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \implies$ 最尤推定量

$\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \implies$ 最尤推定値

すなわち、

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

を解くことによって、最尤推定量 $\hat{\theta}_n \equiv \hat{\theta}_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が得られる。

最尤推定量の性質：

小標本について (n が小さいとき) :

- 一般に, 最尤推定量は不偏性を持っていないが, 適当な変換によって, 不偏推定量を作ることが出来る場合が多い。
- 有効推定量が存在すれば (すなわち, クラメール・ラオの不等式の等号を満たすような推定量が存在するならば), 最尤推定量は有効推定量に一致する。
- 十分統計量が存在すれば, 最尤推定量は十分統計量の関数となる。

大標本について (n が大きいとき) :

$n \longrightarrow \infty$ のとき,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \longrightarrow N(0, \sigma^2)$$

となる。 $\implies$ 一致性, 漸近的正規性, 漸近的有效性

ただし,

$$\sigma^2 = \sigma^2(\theta) = \frac{1}{\mathbf{E} \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right]}$$

すなわち, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)} = \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

となる。

したがって, 厳密ではないが, n が大きいとき,

$$\hat{\theta}_n \sim N \left(\theta, \frac{\sigma^2(\theta)}{n} \right)$$

と近似できる。

すなわち、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\hat{\theta}_n$ の分散はクラメール・ラオの不等式の下
限 $\frac{\sigma^2(\theta)}{n}$ に近づくことを意味する。

$\Rightarrow$ 漸近的に有効推定量

さらに、分母の θ を最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ で置き換えて、 $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

となる。

実際には、 n が大きいとき、

$$\hat{\theta}_n \sim N\left(\theta, \frac{\sigma^2(\hat{\theta}_n)}{n}\right)$$

と近似して用いる。

例：

$X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立で、すべて同一の正規分布 (すなわち、平均 μ , 分散 σ^2 ですべて同一の分布) に従うものとする。 μ, σ^2 の最尤推定量を求める。

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right) \\ &= l(\mu, \sigma^2) \end{aligned}$$

対数をとる。(最大化しやすくなる場合が多い)

$$\begin{aligned}\log l(\mu, \sigma^2) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\end{aligned}$$

対数尤度関数 $\log l(\mu, \sigma^2)$ を μ と σ^2 について微分して、ゼロと置く。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \\ &= 0 \\ \frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

この 2 つの連立方程式を解く。

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

μ, σ^2 の最尤推定量は,

$$\bar{X}, \quad S^{**2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

となる。

$E(\bar{X}) = \mu$ なので, μ の最尤推定量 $\bar{X}$ は不偏推定量である。

$E(S^{**2}) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \neq \sigma^2$ なので, σ^2 の最尤推定量 S^{**2} は不偏推定量で

ない。

例：

$X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立で、すべて同一のベルヌイ分布ですべて同一の分布) に従うものとする。すなわち、 X の確率関数は $P(X = x) = f(x; p) = p^x(1 - p)^{1-p}$, $x = 0, 1$, となる。 p の最尤推定量を求める。

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n; p) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; p) \\ &= \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1 - p)^{1-x_i} \\ &= p^{\sum_i x_i} (1 - p)^{n - \sum_i x_i} \\ &= l(p) \end{aligned}$$

対数をとる。

$$\log l(p) = \left(\sum_i x_i \right) \log(p) + (n - \sum_i x_i) \log(1 - p)$$

対数尤度関数 $\log l(p)$ を p について微分して、ゼロと置く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log l(p)}{\partial p} &= \frac{\sum_i x_i}{p} - \frac{n - \sum_i x_i}{1 - p} \\ &= \frac{\sum_i x_i - np}{p(1 - p)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

この方程式を解く。

$$p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

p の最尤推定量は,

$$\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}$$

となる。

$E(\overline{X}) = p$ なので, p の最尤推定量 $\overline{X}$ は不偏推定量である。

X がベルヌイ分布 $f(x; p)$ のとき, $E(X) = p$ に注意。

例:

$X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立で, すべて同一のポアソン分布 (すなわち, 平均 λ ですべて同一の分布) に従うものとする。 λ の最尤推定量を求める。
ポアソン分布の確率関数は,

$$P(X = x) = f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

なので、尤度関数は、

$$\begin{aligned}l(\lambda) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) \\&= \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \\&= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!}\end{aligned}$$

対数尤度関数は、

$$\log l(\lambda) = \log(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - n\lambda - \log\left(\prod_{i=1}^n x_i!\right)$$

となる。

$$\frac{\partial \log l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n$$

$$= 0$$

これを解いて、 λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ は、

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$$

となる。

$\hat{\lambda}$ は、 λ の不偏推定量，有効推定量，十分推定量，一致推定量である。

証明：

X がパラメータ λ のポアソン分布に従うとき、

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

となる。

不偏性：

$$E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

有効性：

$$\begin{aligned}
V(\hat{\lambda}) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \lambda
\end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda}{n}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]} \\
&= \frac{1}{n\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial (X \log \lambda - \lambda - \log X!)}{\partial \lambda}\right)^2\right]} \\
&= \frac{1}{n\mathbf{E}\left[\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right)^2\right]} \\
&= \frac{\lambda^2}{n\mathbf{E}[(X - \lambda)^2]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^2}{nV(X)} \\
&= \frac{\lambda^2}{n\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{n}
\end{aligned}$$

したがって,

$$V(\hat{\lambda}) = \frac{1}{nE \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 \right]}$$

となり, $V(\hat{\lambda})$ は, クラメル・ラオの下限に一致する。よって, $\hat{\lambda}$ は有効推定量である。

十分性：

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda) &= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \\ &= \frac{\lambda^{n\bar{x}} e^{-n\lambda}}{(n\bar{x})!} \frac{(n\bar{x})!}{\prod_{i=1}^n x_i!} \\ &= g(\bar{x}; \lambda) h(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

と分解できる。

一様性：

$$E(\bar{X}) = \lambda, \quad V(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n}$$

なので、チェビシェフの不等式に当てはめる。

$$P(|\bar{X} - \lambda| > \epsilon) < \frac{\lambda}{n\epsilon^2} \longrightarrow \infty$$

したがって、一様性も成り立つ。