

8.3.2 積率法 (モーメント法)

ν 次の原点の回りの積率: $E(X^\nu) \equiv \mu'_\nu = \mu'_\nu(\theta)$

$E(X^\nu)$ の推定量を $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^\nu$ とする。

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^\nu = \mu'_\nu(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k)$$

$\nu = 1, 2, \dots, k$ として, k 個の連立方程式を $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_k$ について解く。

その解:

$$\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

$$\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

$\vdots$

$$\hat{\theta}_k(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

⇒ 積率法 (モーメント法) による推定量

例：

$X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立で、平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。 μ, σ^2 の積率法による推定値を求める。

$$E(X) = \mu \implies \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \hat{\mu}$$

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 \implies \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2$$

連立方程式を解いて、

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

を得る。この場合，最尤推定量に一致する。

例：

$X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立で，パラメータ α, β のガンマ分布に従うものとする。 α, β の積率法による推定値を求める。パラメータ α, β のガンマ分布とは次の分布である。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \text{ のとき,} \\ 0, & x \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

ただし， $\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数と呼ばれ，

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

と表される。ガンマ関数の性質は、 $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ である。このとき、

$$E(X) = \alpha\beta, \quad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \alpha\beta^2$$

なので、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} = \hat{\alpha}\hat{\beta}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \hat{\alpha}\hat{\beta}^2,$$

となる。よって、

$$\hat{\alpha} = \frac{(1/n) \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2}{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n\bar{X}}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\hat{\beta}} = \frac{n\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

を得る。

8.3.3 最小二乗法

X_i と μ の差 $X_i - \mu$ を考える。

$X_i - \mu$ の二乗和を最小にする μ を求める。

すなわち，

$$\min_{\mu} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

を最小にする μ を求める。 $\implies$

$$\frac{dS(\mu)}{d\mu} = 0$$

の解を求める。ただし，

$$S(\mu) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

とする。

$$\frac{dS(\mu)}{d\mu} = -2 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = 0$$

を満たす μ を $\hat{\mu}$ とする。 $\implies$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

を得る。 $\implies$ 最小二乗推定量

9 標本分布

9.1 正規母集団の場合 (標本平均, 標本不偏分散の標本分布)

大きさ n の無作為標本 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 。

すべての $i = 1, 2, \dots, n$ について, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ とする。

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

9.1.1 正規分布：標本平均 $\bar{X}$ の標本分布

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

証明：

積率母関数を利用する。 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき, X の積率母関数 $\phi(\theta)$ は,

$$\begin{aligned} \phi(\theta) &\equiv \mathbb{E}(e^{\theta X}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 + \theta x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2(\mu + \sigma^2\theta)x + \mu^2)} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (\mu + \sigma^2\theta))^2 + (\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)} dx \\
&= e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (\mu + \sigma^2\theta))^2} dx \\
&= \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)
\end{aligned}$$

と計算される。積分のところは、 $N(\mu + \sigma^2\theta, \sigma^2)$ の確率密度関数に注意
 よって、 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき、 X_i の積率母関数 $\phi_i(\theta)$ は、

$$\phi_i(\theta) = \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)$$

となる。

今, $\overline{X}$ の積率母関数 $\phi_{\overline{x}}(\theta)$ を考える。

$$\begin{aligned}\phi_{\overline{x}}(\theta) &\equiv \mathbf{E}(e^{\theta \overline{X}}) \\&= \mathbf{E}(e^{\theta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}) \\&= \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{\theta}{n} X_i}\right) \\&= \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(e^{\frac{\theta}{n} X_i}) \\&= \prod_{i=1}^n \phi_i\left(\frac{\theta}{n}\right) \\&= \prod_{i=1}^n \exp\left(\mu \frac{\theta}{n} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{\theta}{n}\right)^2\right) \\&= \exp\left(\mu \theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\theta^2}{n}\right)\end{aligned}$$

$$= \exp \left(\mu \theta + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{n} \theta^2 \right)$$

となり、これは、平均 μ 、分散 σ^2/n の正規分布の積率母関数に一致する。

さらに、標準化によって、

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

を得る。これも、同様に、積率母関数で証明できる。

9.1.2 χ^2 (カイ自乗) 分布： 標本不偏分散 S^2 の標本分布

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

証明：

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

なので,

$$\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

$\frac{X_i - \mu}{\sigma}, i = 1, 2, \dots, n$ は互いに独立なので,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

となる。(積率母関数によって証明可)

μ を $\bar{X}$ で置き換えることによって,

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

を得る。(証明略)

9.1.3 t 分布：標本平均 $\bar{X}$ の標本分布

$Z \sim N(0, 1)$, $U \sim \chi^2(m)$, Z と U は独立のとき,

$$\frac{Z}{\sqrt{U/m}} \sim t(m)$$

となる。

これを利用して、 $\bar{X}$ の標本分布を求める。

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ と $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ は独立なので (後述),

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

を得る。

(*) $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ と $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ の独立性

証明：

$X_1, X_2, \dots, X_n$ は互いに独立に正規分布に従うので, $E((\bar{X} - \mu)S^2) = 0$

を証明すればよい。

$$\bar{X} - \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n ((X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu))^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E((\bar{X} - \mu)S^2) \\ &= \frac{1}{n-1} E((\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{n-1} \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^n (X_j - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right) \\
&\quad - \frac{n}{n-1} \mathbf{E}((\bar{X} - \mu)^3) \\
&= \frac{n}{n-1} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - \mu)^2 (X_j - \mu) \right) \\
&\quad - \frac{n}{n-1} \mathbf{E}((\bar{X} - \mu)^3) \\
&= \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{E}((X_i - \mu)^2 (X_j - \mu)) \\
&\quad - \frac{n}{n-1} \mathbf{E}((\bar{X} - \mu)^3) \\
&= \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}((X_i - \mu)^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{n}{n-1} E((\bar{X} - \mu)^3) \\
& = 0
\end{aligned}$$

$Z \sim N(\mu_z, \sigma_z^2)$ のとき, $E((Z - \mu_z)^{2k-1}) = 0, k = 1, 2, \dots$ となる。(積率母関数より証明可)

したがって, $E((X_i - \mu)^3) = E((\bar{X} - \mu)^3) = 0$ となる。

よって,

$$E((\bar{X} - \mu)S^2) = 0$$

を得る。

9.1.4 F 分布

$U \sim \chi^2(n), V \sim \chi^2(m), U$ と V は独立のとき,

$$\frac{U/n}{V/m} \sim F(n, m)$$

となる。

公式：

$$t(m)^2 = F(1, m)$$

$$F(n, m) = 1/F(m, n)$$

9.2 その他の母集団の場合： 標本平均 $\bar{X}$ の標本分布

中心極限定理を利用する。

中心極限定理： 大きさ n の無作為標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$
すべての i について、 $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ とする。

標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ の分布を考える。

$n \longrightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned}\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} &= \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \\ &= \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1)\end{aligned}$$

が成り立つ。

さらに、分母の σ をその標本不偏分散 S で置き換えても、

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1)$$

が成り立つ。(証明略)

例題：母比率の推定量の標本分布： 離散型確率変数 X の取りうる値は $0, 1$ のどちらかで、その確率分布は、

$$P(X = x) = f(x) = p^x(1 - p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

となる。すなわち、

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = 1 - p$$

となる。

何等かの実験を行い、成功すれば $X = 1$ 、失敗すれば $X = 0$ として、確率変数 X に数値を割り当てる。

または、アンケート調査によって、Yes と答えれば $X = 1$ 、No と答えれば $X = 0$ として、確率変数 X に数値を割り当てる。

このとき、 $X = 1$ となる確率 $P(X = 1) = p$ を推定することを考える。

$E(X)$, $V(X)$ を求めておく。

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x f(x) \\ &= \sum_{x=0}^1 x p^x (1-p)^{1-x} \\ &= p \end{aligned}$$

$\mu = E(X)$ のとき, $V(X) = E(X^2) - \mu^2$ により, まず, $E(X^2)$ を求める。

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_x x^2 f(x) \\ &= \sum_{x=0}^1 x^2 p^x (1-p)^{1-x} \\ &= p^2 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

n 個の無作為標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を考える。

$X_1, X_2, \dots, X_n$ はそれぞれ独立に, しかも上記のように, 同一のベルヌイ分布に従うものとする。

このときの母比率 p の推定量を $\hat{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ とする。

すなわち, $\hat{P}$ は n 人の中で成功した回数 (または, Yes と答えた人数) を表し, 標本平均である。

中心極限定理を当てはめる。 $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{\hat{P} - E(\hat{P})}{\sqrt{V(\hat{P})}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \rightarrow N(0, 1)$$

が成り立つ。 $E(\hat{P})$, $V(\hat{P})$ は

$$\begin{aligned} E(\hat{P}) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p \\
V(\hat{P}) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) \quad \longleftarrow \text{互いに独立} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p(1-p) \\
&= \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}$$

となることに注意。 $E(X_i) = p$, $V(X_i) = p(1-p)$ を途中で利用する。

さらに、分母の p をその推定量 $\hat{P}$ で置き換えても、

$$\frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\hat{P}(1 - \hat{P})/n}} \longrightarrow N(0, 1)$$

が成り立つ。(証明略)

9.3 その他の母集団の場合：母数の推定量 $\hat{\theta}_n$ の標本分布 (一般化)

母集団の分布： $f(x; \theta)$

より一般的に、母数 θ の推定量の標本分布を求める。

最尤推定量の性質を利用する。

すなわち、母数 θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ の標本分布について：

$n \longrightarrow \infty$ のとき、

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \longrightarrow N(0, \sigma^2)$$

となる。ただし,

$$\sigma^2 = \sigma^2(\theta) = (\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right])^{-1}$$

となる。

標準化 (基準化) によって, $n \longrightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)} = \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1)$$

となる。

さらに, 分母の θ を最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ で置き換えても, $n \longrightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1)$$

が成り立つ。(証明略)

⇒ 区間推定, 仮説検定

10 統計的検定：大標本検定

10.1 ワルド (Wald) 検定

最尤推定量の性質を利用

母集団の分布： $f(x; \theta)$

母数 θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ の標本分布について：

$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \longrightarrow N(0, \sigma^2)$$

ただし，

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sigma^2(\theta) \\ &= \left(\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right)^{-1}\end{aligned}$$

$$= -\left(\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta^2} \right)\right)^{-1}$$

となる。

$\frac{\sigma^2}{n}$ はクラメル・ラオの下限に一致することに注意。

(復習) クラメル・ラオの不等式：

母数 θ の不偏推定量 $\hat{\theta}_n$ について，

$$V(\hat{\theta}_n) \geq \frac{\sigma^2}{n}$$

が成り立つ。 σ^2 は上で定義されたものとなる。

言い換えると，

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow N(0, 1)$$

を得る。

さらに、分母の θ を最尤推定量 $\hat{\theta}_n$ で置き換えても、 $n \rightarrow \infty$ のとき、近似的に、

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

が成り立つ。

したがって、 $H_0: \theta = \theta_0$ が正しいもとで、 $n \rightarrow \infty$ のとき、近似的に、

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

が成り立つ。

よって、 $H_0: \theta = \theta_0$ と $H_1: \theta \neq \theta_0$ について、

$\hat{\theta}_n$ を実現値で置き換えて,

$$\left| \frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2} \quad \text{のとき, } H_0 \text{ を棄却する。}$$

(*) 検定を行う段階では, $\hat{\theta}_n$ を最尤推定値とみなしていることに注意。すなわち, $\hat{\theta}_n$ はもともと最尤推定量で $X_1, X_2, \dots, X_n$ の関数である。しかし, 検定を行う段階では, $X_1, X_2, \dots, X_n$ を $x_1, x_2, \dots, x_n$ で置き換えて, $\hat{\theta}_n$ を最尤推定値とみなしている。

また, $H_0: \theta = \theta_0$ と $H_1: \theta > \theta_0$ について,
 $\hat{\theta}_n$ を実現値で置き換えて,

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} > z_{\alpha} \quad \text{のとき, } H_0 \text{ を棄却する。}$$

最後に, $H_0: \theta = \theta_0$ と $H_1: \theta < \theta_0$ について,

$\hat{\theta}_n$ を実現値で置き換えて,

$$\frac{\hat{\theta}_n - \theta_0}{\sigma(\hat{\theta}_n)/\sqrt{n}} < -z_\alpha \quad \text{のとき, } H_0 \text{ を棄却する。}$$

例題: 指数分布から生成された n 個の互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を考える。指数分布は,

$$f(x; \gamma) = \gamma e^{-\gamma x} \quad x > 0$$

である。

帰無仮説 $H_0: \gamma = \gamma_0$, 対立仮説 $H_1: \gamma \neq \gamma_0$ を, ワルド検定によって, 検定する。

一般的に, 母数 γ の最尤推定量 $\hat{\gamma}_n$ の標本分布について, $n \rightarrow \infty$ のと

き，近似的に，

$$\frac{\hat{\gamma}_n - \gamma}{\sigma(\hat{\gamma}_n)/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

が成り立つ。ただし，

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sigma^2(\gamma) \\ &= \left(\mathbb{E} \left[\left(\frac{d \log f(X; \gamma)}{d\gamma} \right)^2 \right] \right)^{-1} \\ &= - \left(\mathbb{E} \left(\frac{d^2 \log f(X; \gamma)}{d\gamma^2} \right) \right)^{-1}\end{aligned}$$

となる。

したがって， $H_0: \gamma = \gamma_0$ が正しいもとで， $n \rightarrow \infty$ のとき，近似的に，

$$\frac{\hat{\gamma}_n - \gamma_0}{\sigma(\hat{\gamma}_n)/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

が成り立つ。

よって、 $H_0: \gamma = \gamma_0$ と $H_1: \gamma \neq \gamma_0$ について、

$\hat{\gamma}_n$ を実現値で置き換えて、

$$\left| \frac{\hat{\gamma}_n - \gamma_0}{\sigma(\hat{\gamma}_n)/\sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2} \quad \text{のとき, } H_0 \text{ を棄却する。}$$

まず、 $\sigma^2(\gamma)$ を求める。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma^2(\gamma) \\ &= -\left(E \left(\frac{d^2 \log f(X; \gamma)}{d\gamma^2} \right) \right)^{-1} \\ &= \gamma^2 \end{aligned}$$

$\log f(X; \gamma)$ の2回微分は、

$$\frac{d \log f(X; \gamma)}{d\gamma} = \frac{1}{\gamma} - X$$

$$\frac{d^2 \log f(X; \gamma)}{d\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma^2}$$

に注意。

次に、 γ の最尤推定量 $\hat{\gamma}_n$ を求める。

$X_1, \dots, X_n$ は互いに独立で、指数分布 $f(x; \gamma)$ に従うので、尤度関数 $l(\gamma)$ は

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \gamma) \\ &= \prod_{i=1}^n \gamma e^{-\gamma x_i} \\ &= \gamma^n e^{-\gamma \sum x_i} \end{aligned}$$

対数尤度関数は

$$\log l(\gamma) = n \log(\gamma) - \gamma \sum_{i=1}^n x_i$$

$\log l(\gamma)$ を最大にするような γ を求める。

$$\frac{d \log l(\gamma)}{d\gamma} = \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

を解いて、 x_i を X_i で置き換えて、 γ の最尤推定量 $\hat{\gamma}_n$ は、

$$\hat{\gamma}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

となる。

したがって、 $n \rightarrow \infty$ のとき、近似的に、

$$\frac{\hat{\gamma}_n - \gamma}{\sigma(\hat{\gamma}_n)/\sqrt{n}} = \frac{\hat{\gamma}_n - \gamma}{\hat{\gamma}_n/\sqrt{n}}$$

が成り立つ。

よって、 $H_0: \gamma = \gamma_0$ と $H_1: \gamma \neq \gamma_0$ について、

$\hat{\gamma}_n$ を実現値で置き換えて、

$$\left| \frac{\hat{\gamma}_n - \gamma_0}{\hat{\gamma}_n / \sqrt{n}} \right| > z_{\alpha/2} \quad \text{のとき, } H_0 \text{ を棄却する。}$$

ただし、 γ の最尤推定値 $\hat{\gamma}_n$ は、

$$\hat{\gamma}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

となる。

10.2 尤度比検定

仮説検定：母集団の分布 $f(x; \theta)$ が与えられているときに、母数 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ についての仮説 $\theta_1 = \theta_1^*$ が正しいかどうかを、標本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ の実現値 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ から判断する。

θ_1 : $1 \times k_1$ ベクトル

θ_2 : $1 \times k_2$ ベクトル

$\theta = (\theta_1, \theta_2)$: $1 \times (k_1 + k_2)$ ベクトル

帰無仮説 H_0 : $\theta_1 = \theta_1^* \implies$ 制約の数は k_1 個
尤度関数

$$l(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \theta_2)$$

$(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ を (θ_1, θ_2) の最尤推定量とする。

すなわち, $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ は,

$$\frac{\partial l(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial l(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0$$

の連立方程式を, (θ_1, θ_2) について解いた解である。

⇒ 制約なし最尤推定量

$\hat{\theta}_2$ を, 帰無仮説 $H_0: \theta_1 = \theta_1^*$ が正しいという条件のもとで, θ_2 の最尤推定量とする。

すなわち, $\hat{\theta}_2$) は,

$$\frac{\partial l(\theta_1^*, \theta_2)}{\partial \theta_2} = 0$$

を, θ_2 について解いた解である。⇒ 制約付き最尤推定量 ($\theta_1 = \theta_1^*$ という制約)

$$\text{尤度比: } \lambda = \frac{l(\theta_1^*, \hat{\theta}_2)}{l(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)}$$

n が大きいとき, 近似的に,

$$-2 \log(\lambda) \sim \chi^2(k_1)$$

となる。「 $k_1 =$ 制約の数」に注意。

$-2 \log(\lambda) > \chi_{\alpha}^2(k_1)$ のとき、有意水準 α で、帰無仮説 $H_0: \theta_1 = \theta_1^*$ を棄却する。

$-2 \log(\lambda)$ がゼロに近ければ、帰無仮説を採択する。

$\implies (\theta_1^*, \hat{\theta}_2)$ が $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ に近い値であれば、 $-2 \log(\lambda)$ はゼロに近くなる。

母数の推定量 $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ の分布が求めることが出来ない場合に、尤度比検定は有効である。

例題： 指数分布から生成された n 個の互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を考える。指数分布は、

$$f(x) = \gamma e^{-\gamma x} \quad x > 0$$

である。

帰無仮説 $H_0: \gamma = \gamma_0$ を、尤度比検定によって、検定する。

尤度比

$$\lambda = \frac{l(\gamma_0)}{\max_{\gamma} l(\gamma)} = \frac{l(\gamma_0)}{l(\hat{\gamma})}$$

について、制約の数は 1 なので、

$$-2 \log \lambda \longrightarrow \chi^2(1)$$

となる。

$X_1, \dots, X_n$ は互いに独立で、指数分布 $f(x)$ に従うので、尤度関数 $l(\gamma)$ は

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \prod_{i=1}^n f(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \gamma e^{-\gamma x_i} \\ &= \gamma^n e^{-\gamma \sum x_i} \end{aligned}$$

分子について：

$$l(\gamma_0) = \gamma_0^n e^{-\gamma_0 \sum X_i}$$

分母について：

対数尤度関数は

$$\log l(\gamma) = n \log(\gamma) - \gamma \sum_{i=1}^n x_i$$

$\log l(\gamma)$ を最大にするような γ を求める。

$$\frac{d \log l(\gamma)}{d\gamma} = \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

を解いて、 x_i を X_i で置き換えて、 γ の最尤推定量 $\hat{\gamma}$ は

$$\hat{\gamma} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

となる。

$$l(\hat{\gamma}) = \hat{\gamma}^n e^{-n}$$

したがって、尤度比

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{l(\gamma_0)}{l(\hat{\gamma})} \\ &= \frac{\gamma_0^n e^{-\gamma_0 \sum X_i}}{\hat{\gamma}^n e^{-n}}\end{aligned}$$

を得る。

よって、近似的に、

$$-2 \log \lambda \sim \chi^2(1)$$

となる。

$-2 \log \lambda > \chi_\alpha^2(1)$ のとき、有意水準 α で、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。 $\chi_\alpha^2(1)$ は自由度 1 のカイ二乗分布の $100 \times \alpha$ % 点とする。

例題： $X_1, X_2, \dots, X_n$ の n 個の確率変数は、それぞれ独立に、平均 μ 、分散 σ^2 の分布をするものとする。

平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布の密度関数は

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

で与えられる。

帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を、尤度比検定によって、検定する。

尤度比

$$\lambda = \frac{\max_{\sigma^2} l(\mu_0, \sigma^2)}{\max_{\mu, \sigma^2} l(\mu, \sigma^2)} = \frac{l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2)}{l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)}$$

について、制約の数は 1 なので、

$$-2 \log \lambda \longrightarrow \chi^2(1)$$

となる。

ここで、 $l(\mu, \sigma^2)$ は、

$$\begin{aligned} & l(\mu, \sigma^2) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \mu, \sigma^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)
\end{aligned}$$

であり, $\log l(\mu, \sigma^2)$ は,

$$\begin{aligned}
\log l(\mu, \sigma^2) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2
\end{aligned}$$

である。

分子について：

$\mu = \mu_0$ のもとで, $\log l(\mu_0, \sigma^2)$ を σ^2 について最大化する。

$$\frac{\partial \log l(\mu_0, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = 0$$

この解が $\tilde{\sigma}^2$ である。したがって,

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2$$

を得る。よって, $l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2)$ は,

$$\begin{aligned} & l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2) \\ &= (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp \left(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \right) \\ &= (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp \left(-\frac{n}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。

分母について：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$$

を得る。よって、 $l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ は、

$$\begin{aligned} & l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) \\ &= (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp \left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \right) \\ &= (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp \left(-\frac{n}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。

したがって,

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\max_{\sigma^2} l(\mu_0, \sigma^2)}{\max_{\mu, \sigma^2} l(\mu, \sigma^2)} \\&= \frac{l(\mu_0, \tilde{\sigma}^2)}{l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)} \\&= \frac{(2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)} \\&= \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-n/2}\end{aligned}$$

よって、近似的に、

$$-2 \log \lambda = n(\log \tilde{\sigma}^2 - \log \hat{\sigma}^2) \sim \chi^2(1)$$

となる。

$-2 \log \lambda > \chi_{\alpha}^2(1)$ のとき、有意水準 α で、帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却する。 $\chi_{\alpha}^2(1)$ は自由度 1 のカイ二乗分布の $100 \times \alpha$ % 点とする。