2024/11/22

課題 No.1 (1 章～ 5 章)

● 締め切り： 2024 年 12 月 19 日 1 時間目授業終了（AM10:20）まで

● 提出方法： 授業中に提出するか，研究室（本館 347）まで持って来るかのどちらか

$\boxed{1}$ 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} a - x, & 0 < x < a \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) a を求めよ。

(2) X の平均と分散を求めよ。

(3) $Y = X^2$ とするとき，Y の密度関数を求めよ。

$\boxed{2}$ 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) X の平均と分散を求めよ。

(2) $Y = X^2$ とするとき，Y の平均と分散を求めよ。

(3) $Z = e^X$ とするとき，Z の平均と分散を求めよ。

$\boxed{3}$ 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & 0 < x \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) X の平均と分散を求めよ。

(2) X の積率母関数を求めよ。

(3) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を互いに独立で上に示された分布に従うものとする。$\lambda = 2$ のとき，$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の密度関数は，自由度 $2n$ のカイ二乗分布となることを示せ。ただし，自由度 n のカイ二乗分布とは $\boxed{5}$ の確率変数 X の密度関数である。

$\boxed{4}$ 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) X の平均と分散を求めよ。

(2) $Y = -2\log X$ とするとき，Y の積率母関数を求めよ。ただし，log は自然対数とする。($y = -2\log x$ は $x = e^{-\frac{1}{2}y}$ を意味する)

(3) Y_1 と Y_2 を (2) で求められた密度関数に従う確率変数であるとする。しかも，Y_1 と Y_2 は独立であるとする。$Z = Y_1 + Y_2$ としたとき，Z の密度関数を求めよ。

$\boxed{5}$ 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき，次の問に答えよ。ただし，$\Gamma(a)$ はガンマ関数であり，

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \mathrm{d}x$$

と定義される。

(1) X の平均と分散を求めよ。

(2) X の積率母関数を求めよ。

$\boxed{6}$ 連続型確率変数 X, Y は互いに独立で，$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$ とする。$U = \dfrac{X}{Y}$ とするとき，次の問に答えよ。ただし，$X \sim N(0,1)$ のとき，X の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

と書き表される。

(1) U の密度関数を求めよ。

(2) U の 1 次の積率は存在しないということを証明せよ。

$\boxed{7}$ 連続型確率変数 X, Y の同時密度関数が

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) XY の期待値を求めよ。

(2) X と Y の相関係数を求めよ。

(3) X の周辺密度関数を求めよ。

$\boxed{8}$ 離散型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \cdots,$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ となることを証明せよ。

(2) X の積率母関数を求めよ。

(3) 積率母関数をもとにして，X の平均と分散を求めよ。