課題 No.2 (6 章〜 12 章)

$\boxed{1}$ 平均 μ，分散 σ^2 の正規分布の密度関数は

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

で与えられる。$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で，しかも，それぞれは平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 平均 μ，分散 σ^2 の最尤推定量を求めよ。

(2) σ^2 の最尤推定量は不偏推定量であるかどうかを調べよ。もし，σ^2 の最尤推定量が不偏推定量でないときは，不偏推定量を求めよ (最尤推定量をもとにして考えればよい)。

(3) 帰無仮説 H_0： $\mu=\mu_0$ を，尤度比検定によって，検定したい。どのようにすればよいかを説明せよ。

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ。

(1) 離散型確率変数 X がベルヌイ分布に従うとき，その確率関数は次の式で表される。

$$f(x)=p^x(1-p)^{1-x} \qquad x=0,1$$

このベルヌイ分布から抽出された大きさ n の無作為標本を $X_1, X_2, \cdots ,X_n$ とするとき，p の最尤推定量を求めなさい。

(2) Y を二項分布 $f(y)$ に従う確率変数とする。このとき，$\dfrac{Y}{n}$ は，n が大きくなると，p に近づくことを証明せよ。ただし，二項分布は

$$f(y)={}_nC_y p^y(1-p)^{n-y} \qquad y=0,1,2,\cdots,n$$

で与えられる。

(3) 問 (2) の確率変数 Y について，確率変数 $Z_n\equiv\dfrac{Y-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ を定義する。このとき，n が大きくなるにつれて，Z_n は標準正規分布に近づくことを証明せよ。

(4) 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \text{ のとき}\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

とする。$\dfrac{X}{n}$ は，$n \longrightarrow \infty$ のとき，1 に近づくことを示せ。ただし，$\Gamma(a)$ はガンマ関数であり，

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

と定義される。

$\boxed{3}$ 指数分布から生成された n 個の互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を考える。ただし，指数分布とは次の分布である。

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad x>0$$

で与えられる。このとき，次の問に答えよ。

(1) λ 最尤推定量を $\widehat{\lambda}$ とするとき，$\widehat{\lambda}$ を求めよ。

(2) n が大きいとき，$\widehat{\lambda}$ の平均，分散を求めよ。

$\boxed{4}$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の n 個の確率変数は，それぞれ独立に，平均 μ，分散 σ^2 の分布をするものとする。次のような 2 つの μ の推定量 $\overline{X}, \widetilde{X}$ を考える。

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \qquad \widetilde{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_n)$$

このとき，次の問に答えよ。

(1) $\overline{X}, \widetilde{X}$ は不偏性を持つかどうかを調べよ。

(2) $\overline{X}, \widetilde{X}$ のどちらが有効かを調べよ。

(3) $\overline{X}, \widetilde{X}$ の一致性について調べよ。

$\boxed{5}$ 正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ から 9 個の無作為標本

21 23 32 20 36 27 26 28 30

が得らた。このとき、次の各問に答えなさい。

(1) μ と σ^2 の不偏推定値を求めよ。

(2) 信頼係数 0.90 および 0.95 の μ の信頼区間を求めよ。

(3) 帰無仮説 H_0： $\mu=24$ を対立仮説 H_1： $\mu>24$ に対して有意水準 0.10 および 0.05 で検定しなさい。

$\boxed{6}$ 平均 μ，分散が既知で $\sigma^2=2^2$ である正規母集団から 16 個の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ を抽出し，その標本平均を計算したところ，$\overline{x}=36$ であった。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 平均 μ の信頼係数 0.95 の信頼区間を求めよ。

(2) 帰無仮説 H_0 : $\mu = 35$ を対立仮説 H_1 : $\mu = 36.5$ に対して，有意水準 0.05 で検定せよ。

(3) 問 (2) で行った検定の検出力を求めよ。

$\boxed{7}$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で，すべて同一のポアソン分布に従うものとする。ただし，ポアソン分布の確率関数は

$$P(X = x) = f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots$$

である。

このとき，次の問に答えよ。

(1) λ の最尤推定量 $\widehat{\lambda}$ を求めよ。

(2) $\widehat{\lambda}$ は，λ の不偏推定量であることを証明せよ。

(3) $\widehat{\lambda}$ は，λ の有効推定量であることを証明せよ。

(4) $\widehat{\lambda}$ は，λ の一致推定量であることを証明せよ。

$\boxed{8}$ 連続型確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一の正規分布に従うものとする。このとき，以下の問に答えよ。ただし，正規分布の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

で表される。

(1) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の分布は，平均 μ，分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布に従うことを示せ。

(2) $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ を定義する。Z の分布は，平均 0，分散 1 の正規分布に従うことを示せ。

(3) 標本不偏分散 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ を考える。$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ の分布は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布であることが知られている。これを利用して，S^2 の平均と分散を求めよ。

ただし，自由度 m のカイ自乗分布の密度関数は，

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

として表される。

(4) S^2 は σ^2 の一致推定量であることを示せ。