練習問題と解答 (1 章〜 5 章)

$\boxed{1}$　連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} a - x, & 0 < x < a \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) a を求めよ。

(2) X の平均と分散を求めよ。

(3) $Y = X^2$ とするとき，Y の密度関数を求めよ。

[解答]

(1) 密度関数の性質 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x = 1$ から，

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a (a - x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[ax - \frac{1}{2}x^2\right]_0^a \\
&= \frac{1}{2}a^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

により，$a = \sqrt{2}$ を得る。($a > 0$ なので)

(2) 平均，分散の定義は，$\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int xf(x)\mathrm{d}x$, $\mathrm{V}(X) = \displaystyle\int (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x$ (ただし，$\mu = \mathrm{E}(X)$ とする) である。よって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a x(a-x)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{6}a^3$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \longleftarrow \quad a = \sqrt{2} \text{ を代入する}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X) &= \int (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int x^2 f(x)\mathrm{d}x - \mu^2 \\
&= \int_0^a x^2(a-x)\mathrm{d}x - \mu^2 \\
&= \left[\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^a - \mu^2 \\
&= \frac{1}{12}a^4 - \mu^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$$
$$= \frac{1}{9}$$

(3) X の密度関数を $f(x)$，分布関数を $F(x)$ とする。また，Y の密度関数を $g(y)$ とし，分布関数を $G(y)$ とする。$Y = X^2$ なので，

$$\begin{aligned}
&G(y) \\
&= P(Y < y) \\
&= P(X^2 < y) \\
&= P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) \\
&= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \\
&= F(\sqrt{y}) \quad \longleftarrow \quad F(-\sqrt{y}) = 0
\end{aligned}$$

を得る。さらに，密度関数と分布関数の関係から，

$$
\begin{aligned}
g(y) &= \frac{\mathrm{d}G(y)}{\mathrm{d}y} \\
&= \frac{\mathrm{d}F(\sqrt{y})}{\mathrm{d}y} \\
&= \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\sqrt{y}}{\mathrm{d}y} \qquad \longleftarrow \qquad x = \sqrt{y} \\
&= F'(x)\frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= f(x)\frac{1}{2\sqrt{y}} \\
&= f(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}
\end{aligned}
$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad 0 < y < 2 \text{ のとき}$$

y の範囲は，

$0 < x < \sqrt{2} \Longrightarrow 0 < x^2 < 2 \Longrightarrow 0 < y < 2$

となる。

$\boxed{2}$ 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) X の平均と分散を求めよ。

(2) $Y = X^2$ とするとき，Y の平均と分散を求めよ。

(3) $Z = e^X$ とするとき，Z の平均と分散を求めよ。

[解答]

(1) 平均, 分散の定義は, $\mathrm{E}(X)=\int xf(x)\mathrm{d}x$, $\mathrm{V}(X)=\int (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x$ (ただし，$\mu=\mathrm{E}(X)$ とする) である。よって，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

3 つ目の等式は，$\dfrac{\mathrm{d}e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\mathrm{d}x}=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ を利用する。

$$\mathrm{V}(X)=\int (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int x^2 f(x)\mathrm{d}x - \mu^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x - \mu^2 \\
&= \left[-x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x - \mu^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

4 つ目の等式では，部分積分を利用

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b h'(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&= [h(x)g(x)]_a^b - \int_a^b h(x)g'(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$g(x) = x,\ h'(x) = x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ とおく。

また，4 つ目の等式の第 1 項では，

$$\lim_{x \to \pm\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

を利用する。

4 つ目の等式の第 2 項では，密度関数の積分が 1 になることを利用。

(2) $Y = X^2$ とするとき，Y の平均と分散を求める。

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}(X^2) \\ &= \mathrm{V}(X) + \mu_x^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(1) より，$\mathrm{V}(X) = 1,\ \mu_x = \mathrm{E}(X) = 0$ に注意。

$$\mathrm{V}(Y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{E}(Y - \mu_y)^2 \quad \longleftarrow \quad \mu_y = \mathrm{E}(Y) = 1 \\
&= \mathrm{E}(Y^2) - \mu_y^2 \\
&= \mathrm{E}(X^4) - \mu_y^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x - \mu_y^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x - \mu_y^2 \\
&= \left[-x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&+ 3 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x - \mu_y^2 \\
&= 3\mathrm{E}(X^2) - \mu_y^2 \quad \longleftarrow \quad \mathrm{E}(X^2) = 1,\ \mu_y = 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

6 つ目の等式では，部分積分を利用

$$\int_a^b h'(x)g(x)\mathrm{d}x$$
$$= [h(x)g(x)]_a^b - \int_a^b h(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$g(x) = x^3$, $h'(x) = x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ とおく。

また，6 つ目の等式の第 1 項では，

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

を利用する。

(3) $Z = e^X$ とするとき，Z の平均と分散を求める。

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(e^X)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2x)} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} \mathrm{d}x \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

6 つ目の等式は，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$ が，平均 1，分散 1 の正規分布となり，その積分値は 1 となることによる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(Z) &= \mathrm{E}(Z-\mu_z)^2 \qquad \longleftarrow \qquad \mu_z = \mathrm{E}(Z) = e^{\frac{1}{2}} \\
&= \mathrm{E}(Z^2) - \mu_z^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{E}(e^{2X}) - \mu_z^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x - \mu_z^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)} \mathrm{d}x - \mu_z^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2} \mathrm{d}x - \mu_z^2 \\
&= e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2} \mathrm{d}x - \mu_z^2 \\
&= e^2 - e
\end{aligned}
$$

8 つ目の等式は，$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}$ が，平均 2，分散 1 の正規分布となり，その積分値は 1 となることによる。

$\boxed{3}$ 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, & 0 < x \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) X の平均と分散を求めよ。

(2) X の積率母関数を求めよ。

(3) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を互いに独立で上に示された分布に従うものとする。$\lambda = 2$ のとき，$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の密度関数は，自由度 $2n$ のカイ二乗分布となることを示せ。ただし，自由度 n のカイ二乗分布とは $\boxed{5}$ の確率変数 X の密度関数である。

[解答]

(1) X の平均と分散を求める。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \int x f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty x\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\mathrm{d}x \\ &= \left[-xe^{-\frac{x}{\lambda}}\right]_0^\infty \\ &+ \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\lambda}}\mathrm{d}x \\ &= \left[-\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]_0^\infty \\ &= \lambda\end{aligned}$$

3 つ目の等式では，部分積分を利用

$$\int_a^b h'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$= [h(x)g(x)]_a^b - \int_a^b h(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$g(x) = x,\ h'(x) = \dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$ とおく。

また,

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x}{\lambda}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{\lambda}} = 0$$

を利用

$$\begin{aligned}&\mathrm{V}(X)\\ =&\int (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int x^2 f(x)\mathrm{d}x - \mu^2 \quad \longleftarrow \quad \mu = \mathrm{E}(X) = \lambda \\
&= \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \mathrm{d}x - \mu^2 \\
&= \left[-x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}} \right]_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\lambda}} \mathrm{d}x - \mu^2 \\
&= \left[-x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}} \right]_0^\infty + 2\lambda \int_0^\infty x \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \mathrm{d}x - \mu^2 \\
&= 2\lambda \mathrm{E}(X) - \mu^2 \quad \longleftarrow \quad \mu = \mathrm{E}(X) = \lambda \\
&= 2\lambda^2 - \lambda^2 \\
&= \lambda^2
\end{aligned}
$$

3 つ目の等式では，部分積分を利用

$$
\int_a^b h'(x) g(x) \mathrm{d}x
$$

$$= [h(x)g(x)]_a^b - \int_a^b h(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$g(x) = x^2,\ h'(x) = \dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$ とおく。

6 つ目の等式では，

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-\frac{x}{\lambda}} = 0$$

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_0^\infty x e^{-\frac{x}{\lambda}}\mathrm{d}x$$

を利用。

(2) X の積率母関数を求める。

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= \mathrm{E}(e^{\theta X})\\ &= \int e^{\theta x} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{\theta x} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-(\frac{1}{\lambda}-\theta)x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}-\theta} \int_0^\infty (\frac{1}{\lambda}-\theta) e^{-(\frac{1}{\lambda}-\theta)x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1-\lambda\theta}
\end{aligned}
$$

最後の等式では，$(\frac{1}{\lambda}-\theta)e^{-(\frac{1}{\lambda}-\theta)x}$ は密度関数であるので，その積分値は 1 であることによる。$f(x)$ の λ を $\frac{1}{\lambda}-\theta$ で置き換えたものとなっている。

(3) Y の積率母関数と自由度 $2n$ のカイ二乗分布の積率母関数が一致するこ

とを示す。

$\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{X_n}$ を互いに独立で上に示された分布に従うので，$\boldsymbol{X_i}$ の積率母関数 $\phi_i(\theta)$ は，(2) より，$\boldsymbol{\lambda = 2}$ のとき，

$$\phi_i(\theta) = \frac{1}{1-2\theta} = \phi(\theta)$$

となる。

$\boldsymbol{\lambda = 2}$ のとき，$\boldsymbol{Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n}$ の積率母関数 $\phi_y(\theta)$ は，

$$\begin{aligned}
\phi_y(\theta) &= \mathrm{E}(e^{\theta Y}) \\
&= \mathrm{E}(e^{\theta(X_1+X_2+\cdots+X_n)}) \\
&= \mathrm{E}(e^{\theta X_1})\mathrm{E}(e^{\theta X_2})\cdots\mathrm{E}(e^{\theta X_n}) \\
&= \phi_1(\theta)\phi_2(\theta)\cdots\phi_n(\theta) \\
&= (\phi(\theta))^n
\end{aligned}$$

$$= (\frac{1}{1-2\theta})^{n}$$
$$= (\frac{1}{1-2\theta})^{\frac{2n}{2}}$$

したがって，Y の積率母関数は，

$$\phi_y(\theta) = (\frac{1}{1-2\theta})^{\frac{2n}{2}}$$

となる。

一方，自由度 m のカイ二乗分布は，

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad x > 0 \text{ のとき}$$

なので，その積率母関数 $\phi_{\chi^2}(\theta)$ は，

$$\phi_{\chi^2}(\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{E}(e^{\theta X}) \\
&= \int_0^\infty e^{\theta x} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1-2\theta)x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{y}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \frac{1}{1-2\theta} \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{1}{1-2\theta} \\
&\times \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}}
\end{aligned}
$$

4 つ目の等式で，$y=(1-2\theta)x$ として，置換積分を利用。

$\dfrac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}y^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}y}$ は，自由度 m の χ^2 分布となっているので，その積分値は 1 となる。

$\phi_y(\theta)$ は，$\phi_{\chi^2}(\theta)$ で，$m=2n$ に対応する。

すなわち，$\phi_y(\theta)$ は自由度 $2n$ の χ^2 分布の積率母関数となっている。

したがって，$Y\sim\chi^2(2n)$ となる。

$\boxed{4}$　連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1 \text{ のとき}\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) X の平均と分散を求めよ。

(2) $Y = -2\log X$ とするとき，Y の積率母関数を求めよ。ただし，$\log$ は自然対数とする。($y = -2\log x$ は $x = e^{-\frac{1}{2}y}$ を意味する)

(3) Y_1 と Y_2 を (2) で求められた密度関数に従う確率変数であるとする。しかも，Y_1 と Y_2 は独立であるとする。$Z = Y_1 + Y_2$ としたとき，Z の密度関数を求めよ。

[解答]

(1) X の平均と分散を求める。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int x f(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{V}(X) \\
&= \int (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int x^2 f(x)\mathrm{d}x - \mu^2 \qquad \longleftarrow \qquad \mu = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{2} \\
&= \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x - \mu^2 \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 - \mu^2 \\
&= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

(2) $Y = -2\log X$ とするとき，Y の積率母関数 $\phi_y(\theta)$ を求める。

$$
\begin{aligned}
\phi_y(\theta) &= \mathrm{E}(e^{\theta Y}) \\
&= \mathrm{E}(e^{-2\theta \log X}) \\
&= \mathrm{E}(X^{-2\theta}) \\
&= \int x^{-2\theta} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^{-2\theta}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{1-2\theta}x^{1-2\theta}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{1-2\theta}
\end{aligned}
$$

(3) Y_1 と Y_2 を (2) で求められた密度関数に従う確率変数であるとする。しかも，Y_1 と Y_2 は独立であるとする。$Z = Y_1 + Y_2$ としたとき，Z の

密度関数を求める。

Z の積率母関数 $\phi_z(\theta)$ を求める。

$$\begin{aligned}
\phi_z(\theta) &= \mathrm{E}(e^{\theta Z}) \\
&= \mathrm{E}(e^{\theta(Y_1+Y_2)}) \\
&= \mathrm{E}(e^{\theta Y_1})\mathrm{E}(e^{\theta Y_2}) \\
&= (\phi_y(\theta))^2 \\
&= (\frac{1}{1-2\theta})^2 \\
&= (\frac{1}{1-2\theta})^{\frac{4}{2}}
\end{aligned}$$

これは，自由度 4 のカイ自乗分布の積率母関数に一致する。

よって，$Z \sim \chi^2(4)$ となる。

ただし，自由度 n のカイ自乗分布の密度関数は，

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \text{ のとき}\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

として表され，その積率母関数 $\phi(\theta)$ は，

$$\phi(\theta)=(\frac{1}{1-2\theta})^{\frac{n}{2}}$$

となることに注意。

$\boxed{5}$ 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \text{ のとき}\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

であるとき，次の問に答えよ。ただし，$\Gamma(a)$ はガンマ関数であり，

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \mathrm{d}x$$

と定義される。

(1) X の平均と分散を求めよ。

(2) X の積率母関数を求めよ。

[解答]

(1) X の平均と分散を求める。

平均について：

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} x \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{2^{-\frac{n+2}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \\
&\quad \times \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} 2^{-\frac{n+2}{2}} x^{\frac{n+2}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x \\
&= 2\frac{n}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n'}{2})} 2^{-\frac{n'}{2}} x^{\frac{n'}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x \\
&= n
\end{aligned}
$$

$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-u} \mathrm{d}u \Longrightarrow$ ガンマ関数 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(1) = 1,$
$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ に注意

また，$n' = n + 2$ を使い，確率密度関数の性質から，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x = 1$$

に注意。

分散について：

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$ により，$\mathrm{E}(X^2)$ を求める。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(X^2)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_{0}^{\infty} x^2 \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x\\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n+4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{2^{-\frac{n+4}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{n+4}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \\
&\quad \times \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n+4}{2})} 2^{-\frac{n+4}{2}} x^{\frac{n+4}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x \\
&= 4(\frac{n+2}{2}\frac{n}{2}) \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{n'}{2})} 2^{-\frac{n'}{2}} x^{\frac{n'}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x \\
&= n(n+2)
\end{aligned}
$$

$n' = n + 4$ を使う。

$\mathrm{V}(X) = n(n+2) - n^2 = 2n$

(2) X の積率母関数を求める。

$$
\begin{aligned}
&\phi(\theta) \\
&= \mathrm{E}(e^{\theta X})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{x}{2}) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(1-2\theta)x\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{y}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{1}{2}y) \frac{1}{1-2\theta} \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp(-\frac{1}{2}y) \mathrm{d}y \\
&= (\frac{1}{1-2\theta})^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

$y = (1-2\theta)x$ として置換積分 $(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = (1-2\theta)^{-1})$

積分のところは，自由度 n の $\chi^2(n)$ 分布に注意

$\boxed{6}$ 連続型確率変数 X, Y は互いに独立で，$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$ とする。$U = \dfrac{X}{Y}$ とするとき，次の問に答えよ。ただし，$X \sim N(0,1)$ のとき，X の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

と書き表される。

(1) U の密度関数を求めよ。

(2) U の 1 次の積率は存在しないということを証明せよ。

[解答]

(1) U の密度関数を求める。

X, Y の密度関数は，それぞれ，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2), \quad -\infty < x < \infty$$
$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}y^2), \quad -\infty < y < \infty$$

となる。

X, Y の結合確率密度関数は，X, Y は互いに独立な確率変数なので，

$$\begin{aligned} & h(x, y) \\ &= f(x)g(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}y^2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

$u = \dfrac{x}{y}, v = y$ として，変数変換を行う。

$x = uv$, $y = v$ なので，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，U, V の結合確率密度関数 $s(u,v)$ は，変数変換により，

$$\begin{aligned} & s(u,v) \\ =& h(uv,v) \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ =& \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}v^2(1+u^2))|v| \end{aligned}$$

U の周辺確率密度関数は，

$$p(u)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int s(u, v) \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v| \exp(-\frac{1}{2} v^2 (1 + u^2)) \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} v \exp(-\frac{1}{2} v^2 (1 + u^2)) \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{1 + u^2} \exp(-\frac{1}{2} v^2 (1 + u^2)) \right]_{v=0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\pi(1 + u^2)}
\end{aligned}
$$

これは，コーシー分布の密度関数である。

(2) U の 1 次の積率 (すなわち，平均) は存在しないということを証明する。

$$
\mathrm{E}(U)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int u f(u) \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{1}{\pi(1+u^2)} \mathrm{d}u \\
&= \int_{1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \qquad \longleftarrow \qquad x = 1 + u^2 \text{ で置換積分} \\
&= \left[\frac{1}{2\pi} \log x \right]_1^{\infty} \qquad \longleftarrow \qquad \frac{\mathrm{d} \log x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

$-\infty < u < \infty$ のとき，$x = 1 + u^2$ の範囲は，$1 < x < \infty$ となる。

$\boxed{7}$ 連続型確率変数 X, Y の同時密度関数が

$$
f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}
$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{XY}$ の期待値を求めよ。

(2) $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ の相関係数を求めよ。

(3) $\boldsymbol{X}$ の周辺密度関数を求めよ。

[解答]

(1) $\boldsymbol{XY}$ の期待値を求める。

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}yx^3 + \frac{1}{2}y^2x^2\right]_0^1 \mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}y^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

(2) X と Y の相関係数 $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}}$ を求める。

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 \int_0^1 xf(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x(x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}yx^2\right]_0^1 \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}y\right)\mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{4}y^2\right]_0^1$$

$$= \frac{7}{12}$$

$f(x, y)$ の形は，x と y を入れ替えても同じ形なので，

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X) = \frac{7}{12}$$

となる。

$$\mathrm{V}(X)$$

$$= \mathrm{E}((X-\mu)^2) \quad \longleftarrow \quad \mu = \mathrm{E}(X) = \frac{7}{12}$$

$$= \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^1 x^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \mu^2 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 x^2 (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \mu^2 \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}yx^3\right]_0^1 \mathrm{d}y - \mu^2 \\
&= \int_0^1 (\frac{1}{4} + \frac{1}{3}y)\mathrm{d}y - \mu^2 \\
&= \left[\frac{1}{4}y + \frac{1}{6}y^2\right]_0^1 - \mu^2 \\
&= \frac{5}{12} - (\frac{7}{12})^2 \\
&= \frac{11}{144}
\end{aligned}
$$

同様に，

$$\mathrm{V}(\boldsymbol{Y}) = \mathrm{V}(\boldsymbol{X}) = \frac{11}{144}$$

となる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) &= \mathrm{E}((\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}_x)(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{\mu}_y)) \\
&= \mathrm{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{\mu}_x \boldsymbol{\mu}_y \\
&= \frac{1}{3} - \frac{7}{12}\frac{7}{12} \\
&= -\frac{1}{144}
\end{aligned}$$

ただし，

$$\boldsymbol{\mu}_x = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \frac{7}{12}, \quad \boldsymbol{\mu}_y = \mathrm{E}(\boldsymbol{Y}) = \frac{7}{12}$$

よって，

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y)}}$$

$$= \frac{-\dfrac{1}{144}}{\sqrt{\dfrac{11}{144}\dfrac{11}{144}}} = -\frac{1}{11}$$

(3) X の周辺密度関数 $f_x(x)$ を求める。

$$f_x(x) = \int f(x, y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 (x + y)\mathrm{d}y$$

$$= \left[xy + \frac{1}{2}y^2)\right]_{y=0}^{1}$$

$$= x + \frac{1}{2}$$

$\boxed{8}$　離散型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \cdots,$$

であるとき，次の問に答えよ。

(1) $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ となることを証明せよ。

(2) X の積率母関数を求めよ。

(3) 積率母関数をもとにして，X の平均と分散を求めよ。

[解答]

(1) $\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ となることを証明する。

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{\infty} f(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\displaystyle e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ に注意。

なぜなら，$f(x) = e^x$ としたとき，$f^{(k)}(x) = e^x$ となる。

テーラー展開の公式は，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

なので，$x_0 = 0$ として，$x = 0$ の回りでテーラー展開すると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

を得る。

x を λ，k を x で置き換える。

(2) X の積率母関数を求める。

$$\begin{aligned}
\phi(\theta) &= \mathrm{E}(e^{\theta X}) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{\theta x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(e^{\theta}\lambda)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \exp(e^{\theta}\lambda) \sum_{x=0}^{\infty} \exp(-e^{\theta}\lambda) \frac{(e^{\theta}\lambda)^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \exp(e^{\theta}\lambda) \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda'} \frac{\lambda'^x}{x!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp(-\boldsymbol{\lambda}) \exp(e^{\theta}\boldsymbol{\lambda}) \\
&= \exp(\boldsymbol{\lambda}(e^{\theta} - 1))
\end{aligned}
$$

ただし，$\boldsymbol{\lambda}' = e^{\theta}\boldsymbol{\lambda}$ に注意

(3) 積率母関数をもとにして，X の平均と分散を求める。

平均について：

$\mathbf{E}(X) = \phi'(0)$

$\phi(\theta) = \exp(\boldsymbol{\lambda}(e^{\theta} - 1))$,

$\phi'(\theta) = \boldsymbol{\lambda} e^{\theta} \exp(\boldsymbol{\lambda}(e^{\theta} - 1))$ なので，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \phi'(0) \\
&= \boldsymbol{\lambda}
\end{aligned}
$$

分散について：

$\mathrm{V}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}^2) - (\mathrm{E}(\boldsymbol{X}))^2$ なので，$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}^2)$ を求める。

$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}^2) = \phi''(0)$

$\phi''(\boldsymbol{\theta}) = (1 + \boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\lambda} e^{\boldsymbol{\theta}} \exp(\boldsymbol{\lambda}(e^{\boldsymbol{\theta}} - 1))$ なので，

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\boldsymbol{X}) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{X}^2) - (\mathrm{E}(\boldsymbol{X}))^2 \\
&= \phi''(0) - (\phi'(0))^2 \\
&= (1 + \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^2 \\
&= \boldsymbol{\lambda}
\end{aligned}$$