練習問題と解答 (6 章〜 10 章)

$\boxed{1}$ 平均 μ，分散 σ^2 の正規分布の密度関数は

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

で与えられる。$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で，しかも，それぞれは平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うものとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 平均 μ，分散 σ^2 の最尤推定量を求めよ。

(2) σ^2 の最尤推定量は不偏推定量であるかどうかを調べよ。もし，σ^2 の最尤推定量が不偏推定量でないときは，不偏推定量を求めよ (最尤推定量をもとにして考えればよい)。

(3) 帰無仮説 H_0 : $\mu=\mu_0$ を，尤度比検定によって，検定したい。どのようにすればよいかを説明せよ。

[解答]

(1) 平均 μ，分散 σ^2 の最尤推定量を求める。

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \mu, \sigma^2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \mu, \sigma^2) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right) \\
&= l(\mu, \sigma^2)
\end{aligned}
$$

対数をとる。(最大化しやすくなる場合が多い)

$$
\log l(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log(\sigma^2)
$$

$$
- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2
$$

対数尤度関数 $\log l(\mu, \sigma^2)$ を μ と σ^2 について微分して，ゼロと置く。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) \\
&= 0 \\
\frac{\partial \log l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

この 2 つの連立方程式を解く。

$$
\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}
$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

μ, σ^2 の最尤推定量は，

$$\overline{X}, \quad S^{**2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

となる。

(2) σ^2 の最尤推定量 S^{**2} は不偏推定量であるかどうかを調べる。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(S^{**2}) &= \mathrm{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2) \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n}((X_i - \mu) - (\overline{X} - \mu))^2) \\
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n}((X_i - \mu)^2 \\
&\qquad -2(X_i - \mu)(\overline{X} - \mu) \\
&\qquad +(\overline{X} - \mu)^2)) \\
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \\
&\qquad -2(\overline{X} - \mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \\
&\qquad +n(\overline{X} - \mu)^2)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{n}\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

$$-2n(\overline{X} - \mu)^2 + n(\overline{X} - \mu)^2)$$

$$= \frac{1}{n}\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2)$$

$$= \frac{1}{n}\mathbf{E}(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2)$$

$$-\frac{1}{n}\mathbf{E}(n(\overline{X} - \mu)^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}((X_i - \mu)^2)$$

$$-\mathbf{E}((\overline{X} - \mu)^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) - \mathrm{V}(\overline{X}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \\
&= \sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2 \\
&\neq \sigma^2
\end{aligned}
$$

なので，S^{**2} は σ^2 の不偏推定量ではない。

S^{**2} をもとにして，σ^2 の不偏推定量を求める。

$$
\mathrm{E}(S^{**2}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2
$$

なので，両辺に $\dfrac{n}{n-1}$ をかけて，

$$\frac{n}{n-1}\mathrm{E}(S^{**2}) = \sigma^2$$

を得る。

よって，

$$\frac{n}{n-1}S^{**2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = S^2$$

が σ^2 の不偏推定量となる。

(3) 帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ を，尤度比検定によって，検定する。

尤度比

$$\lambda = \frac{\max\limits_{\sigma^2} l(\mu_0, \sigma^2)}{\max\limits_{\mu,\sigma^2} l(\mu, \sigma^2)} = \frac{l(\mu_0, \widetilde{\sigma}^2)}{l(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2)}$$

について，制約の数は 1 なので，

$$-2\log\boldsymbol{\lambda} \;\longrightarrow\; \chi^2(1)$$

となる。

ここで，$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2)$ は，

$$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2) = (2\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\sigma}^2)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{\mu})^2\right)$$

であり，$\log \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2)$ は，

$$\begin{aligned}\log \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2) = &-\frac{\boldsymbol{n}}{2}\log(2\pi) - \frac{\boldsymbol{n}}{2}\log(\boldsymbol{\sigma}^2)\\ &- \frac{1}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{\mu})^2\end{aligned}$$

である。

分子について：

$\mu = \mu_0$ のもとで，$\log l(\mu_0, \sigma^2)$ を σ^2 について最大化する。

$$\frac{\partial \log l(\mu_0, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2 = 0$$

この解が $\widetilde{\sigma}^2$ である。したがって，

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2$$

を得る。よって，$l(\mu_0, \widetilde{\sigma}^2)$ は，

$$\begin{aligned} & l(\mu_0, \widetilde{\sigma}^2) \\ &= (2\pi\widetilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\widetilde{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right) \end{aligned}$$

$$= (2\pi\widetilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)$$

となる。

分母について：

問 (1) より，

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^2$$

を得る。よって，$l(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2)$ は，

$$l(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi\widehat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\widehat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^2\right) \\
&= (2\pi\widehat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)
\end{aligned}
$$

となる。

したがって，

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\max\limits_{\sigma^2} l(\mu_0, \sigma^2)}{\max\limits_{\mu,\sigma^2} l(\mu, \sigma^2)} \\
&= \frac{l(\mu_0, \widetilde{\sigma}^2)}{l(\widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(2\pi\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^2)^{-n/2}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}\right)}{(2\pi\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2)^{-n/2}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}\right)}$$

$$= \left(\frac{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^2}{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2}\right)^{-n/2}$$

よって，近似的に，

$$-2\log\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{n}(\log\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^2 - \log\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2) \sim \chi^2(1)$$

となる。

$-2\log\boldsymbol{\lambda} > \chi^2_\alpha(1)$ のとき，有意水準 α で，帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。$\chi^2_\alpha(1)$ は自由度 1 のカイ二乗分布の $100 \times \alpha$ % 点とする。

$\boxed{2}$　次の問に答えよ。

(1) 離散型確率変数 X がベルヌイ分布に従うとき，その確率関数は次の式で表される。

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

このベルヌイ分布から抽出された大きさ n の無作為標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とするとき，p の最尤推定量を求めなさい。

(2) Y を二項分布 $f(y)$ に従う確率変数とする。このとき，$\dfrac{Y}{n}$ は，n が大きくなると，p に近づくことを証明せよ。ただし，二項分布は

$$f(y) = {}_nC_y p^y(1-p)^{n-y} \qquad y = 0, 1, 2, \cdots, n$$

で与えられる。

(3) 問 (2) の確率変数 Y について，確率変数 $Z_n \equiv \dfrac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ を定義する。このとき，n が大きくなるにつれて，Z_n は標準正規分布に近づくことを証明せよ。

(4) 連続型確率変数 X の密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

とする。$\dfrac{X}{n}$ は，$n \longrightarrow \infty$ のとき，1 に近づくことを示せ。ただし，$\Gamma(a)$ はガンマ関数であり，

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \mathrm{d}x$$

と定義される。

[解答]

(1) 離散型確率変数 X がベルヌイ分布に従うとき，その確率関数は次の式

で表される。

$$\boldsymbol{f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1}$$

このベルヌイ分布から抽出された大きさ $\boldsymbol{n}$ の無作為標本を $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, $\cdots$,$\boldsymbol{X_n}$ とするとき，$\boldsymbol{p}$ の最尤推定量を求める。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f(x_1, x_2, \cdots, x_n; p)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i; p)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}} \\
&= \boldsymbol{p^{\sum_i x_i}(1-p)^{n-\sum_i x_i}} \\
&= \boldsymbol{l(p)}
\end{aligned}$$

対数をとる。

$$
\begin{aligned}
&\log l(p) \\
&= (\sum_i x_i) \log(p) + (n - \sum_i x_i) \log(1-p)
\end{aligned}
$$

対数尤度関数 $\log l(p)$ を p について微分して，ゼロと置く。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d} \log l(p)}{\mathrm{d} p} &= \frac{\sum_i x_i}{p} - \frac{n - \sum_i x_i}{1-p} \\
&= \frac{\sum_i x_i - np}{p(1-p)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

この方程式を解く。

$$
p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}
$$

p の最尤推定量は，

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

となる。

(2) Y を二項分布 $f(y)$ に従う確率変数とするとき，$\dfrac{Y}{n}$ は，n が大きくなると，p に近づくことを証明する。

Y の平均，分散は，

$$\mathrm{E}(Y) = np, \qquad \mathrm{V}(Y) = np(1-p)$$

なので，

$$\mathrm{E}(\frac{Y}{n}) = \frac{1}{n}\mathrm{E}(Y) = p$$
$$\mathrm{V}(\frac{Y}{n}) = \frac{1}{n^2}\mathrm{V}(Y) = \frac{p(1-p)}{n}$$

となる。

チェビシェフの不等式：

確率変数 X と $g(x) \geq 0$ について，

$$P(g(X) \geq k) \leq \frac{\mathrm{E}(g(X))}{k}$$

となる。$k > 0$ とする。

ここで，$g(X) = (X - \mathrm{E}(X))^2$, $k = \epsilon^2$ とすると，

$$P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{\epsilon^2}$$

を得る。$\epsilon > 0$ とする。

X を $\dfrac{Y}{n}$ に置き換えて，そのままチェビシェフの不等式を当てはめると，

$$P(|\frac{Y}{n} - \mathrm{E}(\frac{Y}{n})| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(\frac{Y}{n})}{\epsilon^2}$$

すなわち，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$P(|\frac{Y}{n} - p| \geq \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \longrightarrow 0$$

となる。したがって，

$$\frac{Y}{n} \longrightarrow p$$

を得る。

(3) n 個の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ はそれぞれ独立に，同一のベルヌイ分布に従うものとする。ただし，$P(X_i = x) = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0, 1$ とする。

$Y = X_1 + X_2 + \ \cdots \ + X_n$ を定義すると，Y は二項分布に従うので，$\dfrac{Y}{n}$ は標本平均とみなすことが出来る。

すなわち，$\dfrac{Y}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$

よって，$\mathrm{E}(\dfrac{Y}{n}) = p$, $\mathrm{V}(\dfrac{Y}{n}) = p(1-p)/n$ を用いて，中心極限定理により，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$\frac{\dfrac{Y}{n} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \longrightarrow N(0, 1)$$

を得る。

$$\boldsymbol{Z_n \equiv \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\dfrac{Y}{n} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}}$$

なので，

$$\boldsymbol{Z_n \ \longrightarrow\ N(0,1)}$$

を得る。

(4) $\boldsymbol{X \sim \chi^2(n)}$ のとき，

$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{n}$, $\mathrm{V}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{2n}$ となるので，

$\mathrm{E}(\dfrac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{n}}) = 1$, $\mathrm{V}(\dfrac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{n}}) = \dfrac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{n}}$ となる。

チェビシェフの不等式を当てはめる。

$$P(|\frac{X}{n} - \mathrm{E}(\frac{X}{n})| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(\frac{X}{n})}{\epsilon^2}$$

$\epsilon > 0$ とする。すなわち，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$P(|\frac{X}{n} - 1| \geq \epsilon) \leq \frac{2}{n\epsilon^2} \longrightarrow 0$$

となる。したがって，

$$\frac{X}{n} \longrightarrow 1$$

を得る。

$\boxed{3}$ 指数分布から生成された n 個の互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を考える。ただし，指数分布とは次の分布である。

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad\qquad x > 0$$

で与えられる。このとき，次の問に答えよ。

(1) λ 最尤推定量を $\widehat{\lambda}$ とするとき，$\widehat{\lambda}$ を求めよ。
(2) n が大きいとき，$\widehat{\lambda}$ の平均，分散を求めよ。

[解答]

(1) $X_1, \cdots, X_n$ は互いに独立で、指数分布 $f(x)$ に従うので，尤度関数 $l(\lambda)$ は

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} \end{aligned}$$

対数尤度関数は

$$\log l(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{n}\log(\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i$$

$\log l(\boldsymbol{\lambda})$ を最大にするような $\boldsymbol{\lambda}$ を求める。

$$\frac{\mathrm{d}\log l(\boldsymbol{\lambda})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{\lambda}} - \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$$

を解いて，$\boldsymbol{x}_i$ を $\boldsymbol{X}_i$ で置き換えて，$\boldsymbol{\lambda}$ の最尤推定量 $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}$ は

$$\widehat{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i}$$

となる。

(2) $\boldsymbol{n}$ 個の無作為標本 $\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{X}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_n$

$\boldsymbol{X}_i$ の密度関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_i;\boldsymbol{\lambda})$

母数 $\boldsymbol{\lambda}$ の最尤推定量 $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_n$ について，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$\sqrt{\boldsymbol{n}}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_n - \boldsymbol{\lambda}) \longrightarrow \boldsymbol{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}^2)$$

となる。ただし，

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{E}\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}\log \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\lambda})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}\right)^{\mathbf{2}}\right]}$$

とする。

まず，$\boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\lambda})$ を求める。

$$\mathbf{E}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\log \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\lambda})}{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}\right)^{\mathbf{2}}\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{X}\right)^{\mathbf{2}}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{E}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda}X + X^2\right) \\
&= \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda}\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X^2) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X^2)$ は

$$
\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}
$$

となる。

したがって，

$$
\sigma^2 = \sigma^2(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{E}\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}\log f(X;\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2\right]} = \lambda^2
$$

よって，n が大きいとき，

$$\widehat{\lambda}_n \sim N\left(\lambda, \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

と近似して用いる。

$\boxed{4}$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の n 個の確率変数は，それぞれ独立に，平均 μ，分散 σ^2 の分布をするものとする。次のような 2 つの μ の推定量 $\overline{X}, \widetilde{X}$ を考える。

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad \widetilde{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$$

このとき，次の問に答えよ。

(1) $\overline{X}, \widetilde{X}$ は不偏性を持つかどうかを調べよ。

(2) $\overline{X}, \widetilde{X}$ のどちらが有効かを調べよ。

(3) $\overline{\boldsymbol{X}}$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ の一致性について調べよ。

[解答]

(1) $\overline{\boldsymbol{X}}$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ は不偏性を持つかどうかを調べる。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\overline{\boldsymbol{X}}) &= \mathbf{E}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i\Big) \\
&= \frac{1}{n}\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i\Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\boldsymbol{X}_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mu} \\
&= \boldsymbol{\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widetilde{\boldsymbol{X}}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{E}(\boldsymbol{X}_1) + \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_n)) \\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}) \\
&= \boldsymbol{\mu}
\end{aligned}
$$

よって，両方とも μ の不偏推定量である。

(2) $\overline{\boldsymbol{X}}$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ のどちらが有効かを調べる。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\overline{\boldsymbol{X}}) &= \mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(\boldsymbol{X}_i)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2$$
$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\mathrm{V}(\widetilde{X}) = \frac{1}{4}(\mathrm{V}(X_1) + \mathrm{V}(X_n))$$
$$= \frac{1}{4}(\sigma^2 + \sigma^2)$$
$$= \frac{\sigma^2}{2}$$

なので，$n > 2$ のとき，$\mathrm{V}(\overline{X}) < \mathrm{V}(\widetilde{X})$ となり，$\overline{X}$ が $\widetilde{X}$ より有効となる。

(3) $\overline{X}$, $\widetilde{X}$ の一致性について調べる。

チェビシェフの不等式を当てはめる。$\overline{X}$ について，

$$P(|\overline{X} - \mathrm{E}(\overline{X})| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(\overline{X})}{\epsilon^2}$$

$\epsilon > 0$ とする。すなわち，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \longrightarrow 0$$

となる。したがって，

$$\overline{X} \longrightarrow \mu$$

を得る。

一方，$\widetilde{X}$ について，

$$P(|\widetilde{X} - \mathrm{E}(\widetilde{X})| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(\widetilde{X})}{\epsilon^2}$$

$\epsilon > 0$ とする。すなわち，$n \longrightarrow \infty$ のとき，

$$P(|\widetilde{X} - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{2\epsilon^2} > 0$$

となる。

$\overline{X}$ は μ の一致推定量であるが，$\widetilde{X}$ は一致性はない。

$\boxed{5}$ 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ から 9 個の無作為標本

$$21 \quad 23 \quad 32 \quad 20 \quad 36 \quad 27 \quad 26 \quad 28 \quad 30$$

が得らた。このとき、次の各問に答えなさい。

(1) μ と σ^2 の不偏推定値を求めよ。

(2) 信頼係数 0.90 および 0.95 の μ の信頼区間を求めよ。

(3) 帰無仮説 H_0 : $\mu = 24$ を対立仮説 H_1 : $\mu > 24$ に対して有意水準 0.10 および 0.05 で検定しなさい。

[解答]

(1) $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\sigma^2}$ の不偏推定量 $\overline{\boldsymbol{X}}$, $\boldsymbol{S^2}$ は

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

で，不偏推定値は

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

である。

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= \frac{1}{9}(21 + 23 + 32 + 20\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+36 + 27 + 26 + 28 + 30\Big) \\
&= 27
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \\
&= \frac{1}{8}\Big((21-27)^2 + (23-27)^2 + (32-27)^2 \\
&\quad +(20-27)^2 + (36-27)^2 + (27-27)^2 \\
&\quad +(26-27)^2 + (28-27)^2 + (30-27)^2\Big) \\
&= \frac{1}{8}(36 + 16 + 25 + 49 \\
&\quad +81 + 0 + 1 + 1 + 9\Big) \\
&= 27.25
\end{aligned}
$$

(2) μ の信頼区間を求める。

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

を利用する。

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

$t_{\alpha/2}(n-1)$ は $100 \times \frac{\alpha}{2}$ % 点で，確率 α と自由度 $n-1$ が与えられると，t 分布表から得られる。

したがって，

$$P(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}})$$
$$= 1-\alpha$$

$\overline{X}$, S^2 を $\overline{x}$, s^2 で置き換えて，

信頼係数 $1-\alpha$ の μ の信頼区間：$\Longrightarrow$

$$(\overline{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

さらに，$\overline{x} = 27$, $s^2 = 27.25$, $n = 9$, $t_{0.05}(8) = 1.860$, $t_{0.025}(8) = 2.306$ なので，

信頼係数 0.90 の μ の信頼区間は,

$$(27 - 1.860\sqrt{\frac{27.25}{9}}, 27 + 1.860\sqrt{\frac{27.25}{9}})$$
$$= (23.76, 30.24)$$

となり，信頼係数 0.95 の μ の信頼区間は,

$$(27 - 2.306\sqrt{\frac{27.25}{9}}, 27 + 2.306\sqrt{\frac{27.25}{9}})$$
$$= (22.99, 31.01)$$

となる。

(3) 帰無仮説 H_0： $\mu = 24$ を対立仮説 H_1： $\mu > 24$ に対して有意水準 0.10 および 0.05 で検定する。

$\overline{X}$ の分布は，$\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ なので，帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ が正しいもとで，$\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。

このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$。

対立仮説 H_1： $\mu > \mu_0$ (片側検定) について：

$P(\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)) = \alpha$ なので，

$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)$ のとき，

有意水準 α で H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。

$\overline{x} = 27,\ s^2 = 27.25,\ \mu_0 = 24,\ n = 9,\ t_{0.10}(8) = 1.397,\ t_{0.05}(8) = 1.860$ を当てはめると，

$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{27 - 24}{\sqrt{27.25/9}} = 1.724 > t_{0.10}(8) = 1.397$ となり，有意水準 0.10 で H_0： $\mu = 24$ を棄却する。

$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{27 - 24}{\sqrt{27.25/9}} = 1.724 < t_{0.05}(8) = 1.860$ となり，有意水準 0.05 で H_0： $\mu = 24$ を棄却しない。

$\boxed{6}$　平均 μ，分散が既知で $\sigma^2 = 2^2$ である正規母集団から 16 個の無作為標本 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$ を抽出し，その標本平均を計算したところ，$\overline{x} = 36$ であった。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 平均 μ の信頼係数 0.95 の信頼区間を求めよ。

(2) 帰無仮説 H_0： $\mu = 35$ を対立仮説 H_1： $\mu = 36.5$ に対して，有意水準 0.05 で検定せよ。

(3) 問 (2) で行った検定の検出力を求めよ。

[解答]

(1) 平均 μ の信頼係数 0.95 の信頼区間を求める。

$\overline{X}$ の分布は

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

となる。

$$P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$z_{\alpha/2}$ は $100 \times \dfrac{\alpha}{2}$ % 点で，確率 α が与えられると，正規分布表から得られる。

したがって，

$$P(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換えて，

信頼係数 $1 - \alpha$ の μ の信頼区間：$\Longrightarrow$

$$(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$\overline{x} = 36$, $\sigma^2 = 2^2$, $n = 16$, $z_{0.025} = 1.960$ を代入すると，

平均 μ の信頼係数 0.95 の信頼区間は，

$$(36 - 1.960\frac{2}{\sqrt{16}}, 36 + 1.960\frac{2}{\sqrt{16}}) = (35.02, 36.98)$$

となる。

(2) 帰無仮説 H_0： $\mu = 35$ を対立仮説 H_1： $\mu = 36.5$ に対して，有意水準 0.05 で検定する。

$\overline{X}$ の分布は，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ なので，帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ が正しいもとで，

$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ となる (μ を μ_0 で置き換える)。このとき，検定統計量 $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。検定統計量の値 $\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$。

対立仮説 H_1： $\mu > \mu_0$ (片側検定) について：

$P(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha) = \alpha$ なので，$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha$ のとき，有意水準 α で帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ を棄却する。

$\overline{x} = 36$, $\sigma^2 = 2^2$, $n = 16$, $z_{0.05} = 1.645$ を代入すると，

$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{36-35}{2/\sqrt{16}} = 2 > z_\alpha = 1.645$ なので，有意水準 $\alpha = 0.05$ で帰無仮説 H_0： $\mu = 35$ を棄却する。

(3) 問 (2) で行った検定の検出力を求める。

検出力とは，対立仮説のもとで，帰無仮説を棄却する確率である。

すなわち，帰無仮説 H_0： $\mu = \mu_0$ のもとで，帰無仮説を棄却する棄却域は，$P(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha) = \alpha$ なので，

$\overline{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{n}$ となる。

対立仮説 H_1： $\mu = \mu_1$ のもとで，帰無仮説を棄却する確率を求める。

すなわち，対立仮説 H_1： $\mu = \mu_1$ のもとで，

$P(\overline{X} > \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{n})$ を求める。

対立仮説 H_1： $\mu = \mu_1$ のもとで，

$$\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$ となるので，

$$P(\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + z_\alpha)$$

となる確率を求めればよい。

$\sigma = 2$, $n = 16$, $\mu_0 = 35$, $\mu_1 = 36.5$, $z_\alpha = 1.645$ を代入すると，

$$P(\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{35-36.5}{2/\sqrt{16}} + 1.645)$$

$$= P(\frac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} > -1.355)$$

$= 1 - 0.0877 = 0.9123$ を得る。

($z_{0.0885} = 1.35$, $z_{0.0869} = 1.36$ に注意)

$\boxed{7}$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で，すべて同一のポアソン分布に従う

ものとする。ただし，ポアソン分布の確率関数は

$$P(X=x)=f(x;\lambda)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},\quad x=0,1,2,\cdots$$

である。

このとき，次の問に答えよ。

(1) λ の最尤推定量 $\widehat{\lambda}$ を求めよ。

(2) $\widehat{\lambda}$ は，λ の不偏推定量であることを証明せよ。

(3) $\widehat{\lambda}$ は，λ の有効推定量であることを証明せよ。

(4) $\widehat{\lambda}$ は，λ の一致推定量であることを証明せよ。

[解答]

(1) λ の最尤推定量 $\widehat{\lambda}$ を求める。

ポアソン分布の確率関数は，

$$P(X = x) = f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \cdots$$

なので，尤度関数は，

$$\begin{aligned} l(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \\ &= \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \end{aligned}$$

対数尤度関数は，

$$\log l(\lambda) = \log(\lambda) \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \log(\prod_{i=1}^{n} x_i!)$$

となる。

$$\frac{\partial \log l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n$$
$$= 0$$

これを解いて，λ の最尤推定量 $\widehat{\lambda}$ は，

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

となる。

(2) $\widehat{\lambda}$ は，λ の不偏推定量であることを証明する。

$$\mathrm{E}(\widehat{\lambda}) = \mathrm{E}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda$$

$$= \lambda$$

(3) $\widehat{\lambda}$ は，λ の有効推定量であることを証明する。

クラメール・ラオの不等式の等号が成り立つことを証明すればよい。

$$\mathrm{V}(\widehat{\lambda}) = \mathrm{V}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \lambda \\
&= \frac{\lambda}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]} \\
&= \frac{1}{n\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial (X \log \lambda - \lambda - \log X!)}{\partial \lambda}\right)^2\right]} \\
&= \frac{1}{n\mathrm{E}\left[\left(\frac{X}{\lambda} - 1\right)^2\right]}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\boldsymbol{\lambda}^2}{\boldsymbol{n}\mathrm{E}[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\lambda})^2]} \\
&= \frac{\boldsymbol{\lambda}^2}{\boldsymbol{n}\mathrm{V}(\boldsymbol{X})} \\
&= \frac{\boldsymbol{\lambda}^2}{\boldsymbol{n}\boldsymbol{\lambda}} \\
&= \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{n}}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}) = \frac{1}{\boldsymbol{n}\mathrm{E}\left[\left(\dfrac{\partial \log \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^2\right]}
$$

となり，$\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}})$ は，クラメール・ラオの下限に一致する。よって，$\widehat{\boldsymbol{\lambda}}$ は有効推定量である。

(4) $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}$ は，$\boldsymbol{\lambda}$ の一致推定量であることを証明する。

$$\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}) = \boldsymbol{\lambda}, \qquad \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}) = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{n}}$$

である。チェビシェフの不等式

$$\boldsymbol{P}(|\widehat{\boldsymbol{\lambda}} - \mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}})| \geq \boldsymbol{\epsilon}) \leq \frac{\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}})}{\boldsymbol{\epsilon}^2}$$

に，$\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}), \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}})$ を代入すると，

$$\boldsymbol{P}(|\widehat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}| > \boldsymbol{\epsilon}) < \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{n}\boldsymbol{\epsilon}^2} \longrightarrow \mathbf{0}$$

が得られる。したがって，一致性も成り立つ。

$\boxed{8}$ 連続型確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立に同一の正規分布に

従うものとする。このとき，以下の問に答えよ。ただし，正規分布の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

で表される。

(1) 標本平均 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ の分布は，平均 μ，分散 $\frac{\sigma^2}{n}$ の正規分布に従うことを示せ。

(2) $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ を定義する。Z の分布は，平均 0，分散 1 の正規分布に従うことを示せ。

(3) 標本不偏分散 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ を考える。$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ の分布は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布であることが知られている。これを利用して，S^2 の平均と分散を求めよ。

ただし，自由度 m のカイ自乗分布の密度関数は，

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

として表される。

(4) S^2 は σ^2 の一致推定量であることを示せ。

[解答]

(1) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ の分布は，平均 μ，分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布に従うことを示す。

積率母関数を利用する。

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき，X の積率母関数 $\phi(\theta)$ は，

$$\phi(\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \mathrm{E}(e^{\theta X}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2+\theta x} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2-2(\mu+\sigma^2\theta)x+\mu^2\right)} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\mu+\sigma^2\theta)\right)^2+(\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2)} \mathrm{d}x \\
&= e^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-(\mu+\sigma^2\theta)\right)^2} \mathrm{d}x \\
&= \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)
\end{aligned}
$$

と計算される。積分のところは，$N(\mu+\sigma^2\theta,\sigma^2)$ の確率密度関数に注意

よって，$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ のとき，X_i の積率母関数 $\phi_i(\theta)$ は，

$$\phi_i(\theta) = \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right)$$

となる。

今，$\overline{X}$ の積率母関数 $\phi_{\overline{x}}(\theta)$ を考える。

$$\begin{aligned}
\phi_{\overline{x}}(\theta) &\equiv \mathrm{E}(e^{\theta\overline{X}}) \\
&= \mathrm{E}(e^{\theta\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}) \\
&= \mathrm{E}(\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{\theta}{n}X_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{n}\mathrm{E}(e^{\frac{\theta}{n}X_i})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^{n} \phi_i(\frac{\theta}{n}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\mu\frac{\theta}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2(\frac{\theta}{n})^2\right) \\
&= \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\theta^2}{n}\right) \\
&= \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\theta^2\right)
\end{aligned}
$$

となり，これは，平均 μ，分散 σ^2/n の正規分布の積率母関数に一致する。

(2) $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ の分布は，平均 0，分散 1 の正規分布に従うことを示す。

$\overline{X}$ の積率母関数 $\phi_{\overline{x}}(\theta)$ は，問 (1) より，

$$\begin{aligned}
\phi_{\overline{x}}(\theta) &\equiv \mathrm{E}(e^{\theta\overline{X}}) \\
&= \exp\left(\mu\theta + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\theta^2\right)
\end{aligned}$$

と計算されることを利用する。

Z の積率母関数 $\phi_z(\theta)$ は，

$$\begin{aligned}
\phi_z(\theta) &\equiv \mathrm{E}(e^{\theta Z}) \\
&= \mathrm{E}\left(\exp(\theta\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})\right) \\
&= \exp\left(-\theta\frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\mathrm{E}\left(\exp(\frac{\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\overline{X})\right) \\
&= \exp\left(-\theta\frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\phi_{\overline{x}}(\frac{\theta}{\sigma/\sqrt{n}})
\end{aligned}$$

$$= \exp\left(-\theta\frac{\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\times \exp\left(\mu\frac{\theta}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}(\frac{\theta}{\sigma/\sqrt{n}})^2\right)$$

$$= \exp(\frac{1}{2}\theta^2)$$

これは，$N(0,1)$ の積率母関数となっている。

(3) まず，準備として，自由度 m のカイ二乗分布の平均と分散を計算する。

自由度 m のカイ二乗分布は，

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})}x^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \quad x > 0 \text{ のとき}$$

なので，その積率母関数 $\phi_{\chi^2}(\theta)$ は，

$$\phi_{\chi^2}(\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{E}(e^{\theta X}) \\
&= \int_0^\infty e^{\theta x} \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}(1-2\theta)x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{y}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \frac{1}{1-2\theta} \mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{1}{1-2\theta}\right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{1}{1-2\theta} \\
&\times \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} \mathrm{d}y \\
&= (1-2\theta)^{-\frac{m}{2}}
\end{aligned}
$$

となる。

4 つ目の等式で，$y = (1-2\theta)x$ として，置換積分を利用。
$\dfrac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} y^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y}$ は，自由度 m の χ^2 分布となっているので，その積分値は 1 となる。

積率母関数を微分して，

$$\phi'_{\chi^2}(\theta) = m(1-2\theta)^{-\frac{m}{2}-1}$$
$$\phi''_{\chi^2}(\theta) = m(m+2)(1-2\theta)^{-\frac{m}{2}-2}$$

を用いると，

$$\mathrm{E}(X) = \phi'_{\chi^2}(0) = m$$
$$\mathrm{E}(X^2) = \phi''_{\chi^2}(0) = m(m+2)$$

が得られる。

よって，自由度 m の χ^2 分布の平均は m，分散は，

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 \\ &= m(m+2) - m^2 \\ &= 2m \end{aligned}$$

となる。

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ なので，これを利用すると，

$$\mathrm{E}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n-1$$

$$\mathrm{V}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$$

となる。よって，

$$\frac{n-1}{\sigma^2}\mathrm{E}(S^2) = n-1$$

$$(\frac{n-1}{\sigma^2})^2\mathrm{V}(S^2) = 2(n-1)$$

を利用して，S^2 の平均と分散は，

$$\mathrm{E}(S^2) = \sigma^2$$

$$\mathrm{V}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

となる。

(4) S^2 は σ^2 の一致推定量であることを示す。

チェビシェフの不等式を用いる。

$$P(|S^2 - \mathrm{E}(S^2)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{V}(S^2)}{\epsilon^2}$$

に，$\mathrm{E}(S^2)$, $\mathrm{V}(S^2)$ を代入すると，

$$P(|S^2 - \sigma^2| \geq \epsilon) \leq \frac{2\sigma^4}{(n-1)\epsilon^2} \longrightarrow 0$$

が得られる。したがって，一致性も成り立つ。