第2章　統計学の回帰分析への応用

本章からは，統計学を回帰分析に応用して，パラメータに関する分析を行う。

2.1　確率的モデル：単回帰モデル

再び，話を簡単にするために単回帰モデルを考えることにしよう。すなわち，(X_1, Y_1)，(X_2, Y_2)，$\cdots$，(X_n, Y_n) のように n 組のデータがあり，X_i と Y_i との間に線型関係を想定する。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i$$

前章では，最小二乗法を用いて，データに直線のあてはめを行った。その結果，$\hat\alpha$，$\hat\beta$ を求めるための最小二乗法による公式は，

$$\hat\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$
$$\hat\alpha = \overline{Y} - \hat\beta\overline{X}$$

となった。$\hat\beta$ の式の 2 つ目の等式には，補論 A.3.5（**??**ページ）の項目 5 が利用されている。

　これも繰り返しになるが，Y_i の予測値を $\hat Y_i = \hat\alpha + \hat\beta X_i$ とするとき，Y_i，$\hat Y_i$，$\hat u_i$，$\hat\alpha$，$\hat\beta$ の関係は以下の通りであった。

$$\begin{aligned} Y_i &= \hat Y_i + \hat u_i \\ &= \hat\alpha + \hat\beta X_i + \hat u_i \end{aligned} \tag{2.1}$$

このように，観測された実績値（または，実現値）Y_i と回帰直線による予測値 $\hat Y_i$ が一致することは稀で，残差 $\hat u_i$ が含まれる。$\hat\alpha$，$\hat\beta$ をその未知パラメータ α，

β で置き換えた場合，X と Y との真の関係を表す回帰モデルを

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \tag{2.2}$$

として**誤差項**，または，**攪乱項** u_i を含め確率変数として考える。残差 $\hat{u}_i$ は確率変数である誤差項 u_i の実現値としてみなすことができる。u_i は平均 0，分散 σ^2 の正規分布が仮定されることが多い。確率変数である誤差項 u_i が加えられているので，Y_i も確率変数となる。ある確率密度分布（ここでは正規分布）があって，その分布に従い，データ（ここでは Y_i）が生成されるモデルのことを**確率的モデル**と呼ぶ。すなわち，回帰式を確率モデルとして捉える。前章と同じであるが，それぞれの変数の呼び名をもう一度以下にまとめておく。

- Y_i： 被説明変数，または，従属変数
- X_i： 説明変数，または，独立変数
- u_i： 誤差項，または，攪乱項
- $\hat{u}_i$： 残差
- α，β： 未知母数，または，未知パラメータ

- $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$：推定量（特に，最小二乗推定量），時には，推定値（最小二乗推定値）

推定量，推定値については，補論**??**で説明している。大雑把に述べると，データを代入して得られた数値のことを推定値，X_i や Y_i を用いた記号のまま（すなわち，確率変数 Y_i の関数）であれば推定量とそれぞれ呼ばれる。誤差項 u_i を導入することによって，$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の性質を統計学的に考察することが可能となる。すなわち，$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ から α, β に関する推論を行うことができる。

2.2　回帰モデルの仮定

(2.2) 式で表される回帰モデルの仮定は次のとおりである。

(i) X_i は確率変数でない（すなわち，非確率変数）と仮定する。言い換えると，X_i は固定された値，もしくは，与えられた値である。

(*) この仮定はよく考えてみると，少し可笑しな仮定である。次節では，誤差項を含める理由の一つに，データには測定上の誤差が含まれると述

べる。しかし，この仮定では「説明変数には測定上の誤差を考えない」という仮定になっている。同じ経済データを用いているにもかかわらず，被説明変数は確率変数，説明変数は非確率変数と仮定する。話を前に進めるために，当面，このような仮定を置くことにする。この件は**??**節で取り上げられる。

(ii) すべての i について，平均 $\mathrm{E}(u_i) = 0$ とする。

(iii) すべての i について，分散 $\mathrm{V}(u_i) = \sigma^2$ とする（$\mathrm{E}(u_i) = 0$ なので，$\mathrm{V}(u_i) = \mathrm{E}(u_i^2)$ に注意）。

(iv) すべての $i \neq j$ について，共分散 $\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = 0$ とする（$\mathrm{E}(u_i) = 0$ なので，$\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = \mathrm{E}(u_i u_j)$ に注意）。

(v) すべての i について，$u_i \sim N(0,\ \sigma^2)$ とする（「u_i は平均ゼロ，分散 σ^2 の正規分布に従う」と読む）。(ii) と (iii) で u_i の平均，分散を仮定しているが，ここでは u_i は正規分布の仮定を追加している。

(vi) $n \longrightarrow \infty$ のとき（すなわち，n が大きくなるとき），$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \longrightarrow \infty$ とする。これは技術的な仮定であるが，現実的な仮定でもある。

(ii) ~ (v) を合わせて,「攪乱項 u_1，u_2，$\cdots$，u_n はそれぞれ独立に平均ゼロ，分散 σ^2 の正規分布に従う」ということを意味する。

特に，回帰直線は，両辺に期待値をとって，

$$\mathrm{E}(Y_i) = \mathrm{E}(\alpha + \beta X_i + u_i) = \alpha + \beta X_i + \mathrm{E}(u_i) = \alpha + \beta X_i$$

として解釈される。この直線は未知である。なぜなら，切片 α，傾き β 共に未知だからである。未知であるために，観測されたデータを用いて推定することになる。

2.2.1　誤差項（攪乱項）の経済学的意味

データが与えられたとき，最小二乗法によって直線の式を求めることができる。実際のデータと直線の式との間には乖離があり，データと直線との差（縦軸方向の差）が残差と呼ばれるものである。したがって，Y_i，X_i，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$，$\hat{u}_i$ の

関係は (2.1) 式で表される。また，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ を α，β で置き換えると，$\hat{u}_i$ は u_i で置き換えられることになり，Y_i，X_i，α，β，u_i の関係は (2.2) 式で表される。誤差項 u_i を含めて，(2.2) 式のような等式で表されることになる。なぜ誤差項を加えるのかという疑問が出てくるが，様々な理由が考えられる。代表的な理由として，次のものが考えられる。

1. 経済理論自身が不完全：X 以外にも他の説明変数が必要であるにもかかわらず，それを誤って除いている可能性がある。除いた部分を誤差項として捉える。

2. モデルの定式化が不完全：Y と X との間の線型関係が誤りかもしれない。これまで回帰モデルは直線として話を進めてきたが，直線というのも一つの仮定に過ぎない。実際は，二次式，三次式，双曲線，その他の非線型関数かもしれない。この関数形自体も未知である。直線として近似したために生じる誤差を誤差項として捉える。

3. 理論モデルとデータとの対応：理論モデルで考えられる変数と実際に用いたデータが適当でないかもしれない。例えば，所得のデータについては国民総生産，国民所得，可処分所得，労働所得 $\cdots$，金利では公定歩

合，国債利回り，定期預金金利，全国銀行平均約定金利 ··· など同じような データが公表される。どのデータを使えばよいかも時には判断が難しい場合がある。

4. 測定上の誤差：経済データは一般的に推計されているため完全ではない。例えば，国内総支出の項目の一つの家計最終消費支出を例にとると，家計最終消費支出とは家計（個人企業を除いた消費主体としての家計）の新規の財貨・サービスに対する支出である。しかし，日本の全部の家計を一つ一つ（一軒一軒）調べて，足し合わせてデータを作成することは現実的には不可能である（時間的にも不可能）。ある期間内でデータを作成するためには，推計する必要がある。そのため，データには誤差が含まれる。この誤差のことを**測定誤差**，または，**観測誤差**と呼ばれる。

2.3　$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の統計的性質

2.3.1　準備

最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ の説明変数 X_i に関連する部分を ω_i として次のように定義する。

$$\omega_i = \frac{X_i - \overline{X}}{\sum_{j=1}^{n} (X_j - \overline{X})^2} \tag{2.3}$$

このとき，

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 0$$

となる。なぜなら，分子だけに注目すると，$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ から $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}) = 0$ となるので，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 0$ が得られる。また，

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i = 1$$

となる。なぜなら，$\overline{X}\sum_{i=1}^{n}\omega_i$ を差し引くと（$\sum\omega_i = 0$ に注意），$\sum_{i=1}^{n}\omega_i X_i = \sum_{i=1}^{n}\omega_i X_i - \overline{X}\sum_{i=1}^{n}\omega_i = \sum_{i=1}^{n}\omega_i X_i - \sum_{i=1}^{n}\omega_i\overline{X} = \sum_{i=1}^{n}\omega_i(X_i - \overline{X}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2} = 1$ が得られる。最後の等式は $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2$ を用いている（添え字を代えても，1 から n まで足し合わせることは共に同じ）。

2.3.2　$\hat{\beta}$ について

ω_i を用いると，β の最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ は,

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} = \sum_{i=1}^{n}\omega_i(Y_i-\overline{Y})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \omega_i Y_i \tag{2.4}$$

となる。2 行目では，$\sum \omega_i = 0$ が利用されている。

(2.4) 式の右辺は，Y_1，Y_2，$\cdots$，Y_n の線型関数となっている。このことから，最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ は**線型推定量**ということが言える。

2.3.3 $\hat{\alpha}$ について

α の最小二乗推定量 $\hat{\alpha}$ については，

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \overline{X}\sum_{i=1}^{n} \omega_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{n} - \overline{X}\omega_i) Y_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i \tag{2.5}$$

と書き換えられる。ただし，$\lambda_i = \dfrac{1}{n} - \overline{X}\omega_i$ とする。すなわち，(2.5) 式から，$\hat{\alpha}$ もまた Y_1，Y_2，$\cdots$，Y_n の線型推定量となっている。

一般的に，説明変数が増えたとしても（重回帰モデルでも），最小二乗推定量は Y_1，Y_2，$\cdots$，Y_n の線型推定量であると言える。

2.3.4　$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の平均

$\hat{\beta}$ は次のように書き換えられた。さらに，$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を代入して，(2.4) 式は,

$$
\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\alpha + \beta X_i + u_i) = \alpha\sum_{i=1}^{n} \omega_i + \beta\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i \\
&= \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

と書き換えられる。最後の等式では，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i = 1$ を利用している。(2.6) 式を用いて，$\hat{\beta}$ の平均，分散，分布を求めることになる。

(2.6) 式の両辺に期待値をとる。ω_i は非確率変数，補論**??**の定理 (**??**)，(**??**),

さらに，2.2 節の誤差項の仮定 (ii) を利用すると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{\beta}) &= \mathrm{E}(\beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i) && \longleftarrow \text{(2.6) 式を代入} \\
&&& \text{補論の定理 (??) を利用} \\
&= \beta + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i) \\
&&& \text{補論の定理 (??) を利用} \\
&= \beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{E}(u_i) \\
&&& \text{2.2 節の誤差項の仮定 (ii)}\ \ \mathrm{E}(u_i) = 0 \text{ を利用} \\
&= \beta
\end{aligned}
$$

が得られる。すなわち，最小二乗推定量 $\hat{\beta}$ の期待値は β になるということから，$\hat{\beta}$ は β の**不偏推定量**（推定量の持つべき望ましい性質の一つ）であると言える。

α の最小二乗推定量 $\hat{\alpha}$ については,

$$
\begin{aligned}
\hat{\alpha} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \\
&= \alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

と書き換えられる。途中の計算で,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{n} - \overline{X}\omega_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \overline{X}\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{n} - \overline{X}\omega_i)X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \overline{X}\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i = 0$$

が使われる。

$\hat{\alpha}$ の平均を求める。(2.7) 式の両辺に期待値をとると，補論**??**の定理 (**??**) – (**??**) と 2.2 節の仮定 (ii) を用いて,

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{E}(u_i) = \alpha$$

となる。$\hat{\alpha}$ もまた α の不偏推定量であると言える。

ここまでで言えることは，最小二乗推定量 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ は未知パラメータ α，β の**線型不偏推定量**となっているということである。

2.3.5　$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分散

$\hat{\beta}$ の分散について，補論の定理 (**??**)，(**??**)，2.2 節の誤差項の仮定 (iii)，(iv) を用いると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{\beta}) &= \mathrm{V}(\beta + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i) && \longleftarrow \text{(2.6) 式を代入} \\
& && \text{補論の定理 (??) を利用} \\
&= \mathrm{V}(\sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i) \\
& && \text{2.2 節の誤差項の仮定 (iv)}\ \ \mathrm{Cov}(u_i,\ u_j) = 0,\ \text{補論の定理 (??) を利用} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(\omega_i u_i) \\
& && \text{再度，補論の定理 (??) を利用} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \mathrm{V}(u_i) \\
& && \text{2.2 節の誤差項の仮定 (iii)}\ \ \mathrm{V}(u_i) = \sigma^2 \text{ を利用} \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \\
& && \text{(2.3) 式の } \omega_i \text{ を代入} \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}
\end{aligned}
$$

1 つ目の等式は (2.6) 式を代入，2 つ目の等式は $\sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i$ を一つの確率変数とみなし補論の定理 (**??**) を当てはめる。3 つ目の等式では $\omega_i u_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$ は互

いに独立なので，補論の定理 (**??**) を当てはめる。4 つ目の等式では再度，補論の定理 (**??**) を当てはめる。5 つ目の等式では，誤差項 (または，撹乱項) の仮定より，$\mathrm{V}(u_i) = \sigma^2$ を用いる。最後の等式は，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum (X_j - \overline{X})^2}$ に注意して，

$$\sum \omega_i^2 = \sum \Big(\frac{X_i - \overline{X}}{\sum (X_j - \overline{X})^2}\Big)^2 = \sum \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\Big(\sum (X_j - \overline{X})^2\Big)^2} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{\Big(\sum (X_j - \overline{X})^2\Big)^2} = \frac{1}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

を用いている。途中で，$\sum (X_i - \overline{X})^2 = \sum (X_j - \overline{X})^2$ を利用している。

よって，前節と本節を合わせて，$\hat{\beta}$ の平均は β，分散は $\dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}$ となることが示された。

$\hat{\alpha}$ の分散について，

$$\mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \mathrm{V}(\alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2})$$

1 つ目の等式は (2.7) 式を代入，2 つ目の等式は $\mathrm{V}(\hat{\beta})$ の計算と全く同じで，ω_i を λ_i で置き換えればよい。最後の 3 つ目の等式は,

$$\sum \lambda_i^2 = \sum (\frac{1}{n} - \overline{X}\omega_i)^2 = \sum (\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\overline{X}\omega_i + \overline{X}^2\omega_i^2) = \frac{1}{n} + \overline{X}^2 \sum \omega_i^2 = \frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

となる。途中で $\sum \omega_i = 0$ が使われている。

よって，前節と本節を合わせて，$\hat{\alpha}$ の平均は α，分散は $\sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2})$ となることが示された。

さらに，$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の共分散を求める。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) &= \mathrm{E}\Big((\hat{\alpha}-\mathrm{E}(\hat{\alpha}))(\hat{\beta}-\mathrm{E}(\hat{\beta}))\Big) && \longleftarrow \text{ 共分散の定義 (??)} \\
& && \text{E}(\hat{\alpha})=\alpha,\ \text{E}(\hat{\beta})=\beta \text{ を代入} \\
&= \mathrm{E}\Big((\hat{\alpha}-\alpha)(\hat{\beta}-\beta)\Big) \\
& && \text{(2.6) 式，(2.7) 式を代入} \\
&= \mathrm{E}\Big((\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i)(\sum_{i=1}^{n}\omega_i u_i)\Big) \\
& && \text{一つの足し算記号の添え字を } i \text{ から } j \text{ に変更} \\
&= \mathrm{E}\Big((\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i)(\sum_{j=1}^{n}\omega_j u_j)\Big) \\
& && \text{足し算記号を移動} \\
&= \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\omega_j u_i u_j) \\
& && \text{確率変数に期待値} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\omega_j \mathrm{E}(u_i u_j) \\
& && \text{2.2 節の誤差項の仮定 (iv) } i\neq j \text{ について E}(u_i u_j)=0 \text{ を利用} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\omega_i \mathrm{E}(u_i^2) \\
& && \lambda_i=\frac{1}{n}-\overline{X}\omega_i,\ \text{2.2 節の誤差項の仮定 (iii) E}(u_i)=\sigma^2 \text{ を利用} \\
&= \sigma^2\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{n}-\overline{X}\omega_i)\omega_i \\
& && \textstyle\sum\omega_i=0 \text{ を利用} \\
&= -\sigma^2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 \\
& && \text{(2.3) 式の } \omega_i \text{ を代入} \\
&= -\frac{\sigma^2\overline{X}}{\sum^{n}(X_i-\overline{X})^2}
\end{aligned}
$$

1 行目は共分散の定義で補論の定義 (**??**) 参照，2 行目の等式は $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の期待値は前節で求めた通り α，β を代入している。3 行目の 1 つ目の等式は (2.6) 式と (2.7) 式を代入，4 行目の等式は片方の添え字を i から j に変更（総和は添え字に依存しない），5 行目の等式は補論**??**の項目 8 を利用している。6 行目の等式は $u_i u_j$ を一つの確率変数とみなして補論の定理 (**??**)，(**??**) を利用，7 行目の等式は仮定の一つの $i \neq j$ について $\mathrm{Cov}(u_i, u_j) = \mathrm{E}(u_i u_j) = 0$ を利用，8 行目の等式は仮定の一つの $\mathrm{V}(u_i) = \mathrm{E}(u_i^2) = \sigma^2$ と λ_i を代入している。9 行目の等式では $\sum \omega_i = 0$ を利用，最後の行の等式は ω_i を X_i で表している。

数値例： これまでの数値例を用いて，$\hat{\beta}$，$\hat{\alpha}$ の分散，共分散を求めよう。

i	X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i
1	5	4	25	20
2	1	1	1	1
3	3	1	9	3
4	2	3	4	6
5	4	4	16	16
合計	$\sum X_i$	$\sum Y_i$	$\sum X_i^2$	$\sum X_iY_i$
	15	13	55	46
平均	$\overline{X}$	$\overline{Y}$		
	3	2.6		

誤差項 u_i の分散 σ^2 はそのまま使う。

$$\mathrm{V}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2} = \frac{\sigma^2}{55 - 5 \times 3^2} = \frac{\sigma^2}{10} = 0.1\sigma^2$$

$$\mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\right) = \sigma^2\left(\frac{1}{5} + \frac{3^2}{55 - 5 \times 3^2}\right) = 1.1\sigma^2$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = -\frac{\sigma^2\overline{X}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} = -\frac{3\sigma^2}{55-5\times 3^2} = -0.3\sigma^2$$

注意： 残差平方和 $S(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ を最小にする $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ は (**??**) 式，(**??**) 式を満たすということは既に見たとおりである。(**??**) 式，(**??**) 式を行列を用いて解いたものは (**??**) 式によって表される。(**??**) 式で出てくる逆行列と $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の分散，共分散には密接な関係がある。逆行列に σ^2 を掛けたもののそれぞれの要素は,

$$\sigma^2\begin{pmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\sigma^2}{n\sum X_i^2-(\sum X_i)^2}\begin{pmatrix} \sum X_i^2 & -\sum X_i \\ -\sum X_i & n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2(\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2}) & -\frac{\sigma^2\overline{X}}{\sum(X_i-\overline{X})^2} \\ -\frac{\sigma^2\overline{X}}{\sum(X_i-\overline{X})^2} & \frac{\sigma^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{V}(\hat{\alpha}) & \mathrm{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) & \mathrm{V}(\hat{\beta}) \end{pmatrix}$$

となる。

このように，(**??**) 式，(**??**) 式を行列を用いて解く際に出てくる逆行列に誤差項の分散 σ^2 を掛けたものは，対角要素が分散 $\mathrm{V}(\hat{\alpha})$，$\mathrm{V}(\hat{\beta})$，非対角要素が

共分散 Cov($\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$) に対応する。この結果は偶然ではなく，重回帰の場合も同様のことが言える。重回帰モデルの場合の β_1，β_2，$\cdots$，β_k の最小二乗推定量は (**??**) 式の $\hat{\beta}_1$，$\hat{\beta}_2$，$\cdots$，$\hat{\beta}_k$ で与えられるが，それぞれの分散 V($\hat{\beta}_1$)，V($\hat{\beta}_2$)，$\cdots$，V($\hat{\beta}_k$) は (**??**) 式の逆行列の対角要素に誤差項の分散 σ^2 を掛け合わせたものに等しい。すなわち，(**??**) 式の右辺の逆行列の i 行 j 列の要素を a_{ij} とした場合，$j = 1, 2, \cdots, k$ について $\hat{\beta}_j$ の分散は $\mathrm{V}(\hat{\beta}_j) = \sigma^2 a_{jj}$，$i \neq j = 1, 2, \cdots, k$ について $\hat{\beta}_i$ と $\hat{\beta}_j$ の共分散は $\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j) = \sigma^2 a_{ij}$ となることが証明できる。

2.3.6　$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分布 (σ^2 が既知の場合)

単回帰モデルについて，これまでで，最小二乗推定量の切片 $\hat{\alpha}$，傾き $\hat{\beta}$ の平均・分散をそれぞれ求めた。

まとめると，$\hat{\beta}$ は次のように表される。

$$\hat{\beta} = \sum \omega_i Y_i = \beta + \sum \omega_i u_i$$

ただし，$\omega_i = \dfrac{X_i - \overline{X}}{\sum (X_j - \overline{X})^2}$ とする。平均・分散は，それぞれ，

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta, \qquad \mathrm{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum \omega_i^2 = \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

となった。

一方，$\hat{\alpha}$ については，

$$\hat{\alpha} = \sum \lambda_i Y_i = \alpha + \sum \lambda_i u_i$$

と書き表される。ただし，$\lambda_i = \dfrac{1}{n} - \overline{X}\omega_i$ とする。平均・分散は，それぞれ，

$$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \alpha, \qquad \mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \sum \lambda_i^2 = \sigma^2 (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2})$$

であった。

本書の範囲を超えるので，証明はしないが，補論 (**??**) のように，正規分布に従う n 個の確率変数の加重和もまた正規分布に従うことが知られている。こ

のことから,「n 個の確率変数 u_1, u_2, $\cdots$, u_n の加重和＋未知パラメータ」となっているので, $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ も正規分布に従う確率変数である。したがって,

$$\hat{\beta} \sim N\Big(\beta,\ \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\Big) \tag{2.8}$$

$$\hat{\alpha} \sim N\Big(\alpha,\ \sigma^2\big(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\big)\Big) \tag{2.9}$$

が得られる。

2.3.7　$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の性質：最良線型不偏性と一致性

最小二乗推定量が望ましい推定量かどうかを調べる。一般に, (i) 不偏性（unbiasedness）, (ii) 有効性（efficiency）, (iii) 一致性（consistency）の 3 つの性質を持った推定量が望ましいと言われている。一つずつ確認していこう。これらの性質については, **??**ページの補論**??**にまとめている。

(i) 不偏性（unbiasedness）：　既に証明したとおり, $\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta$, $\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \alpha$ なので, $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ は β, α の不偏推定量である。

(ii) 最良線型不偏性（best linear unbiasedness）：　**有効推定量**（efficiency）というのは，不偏推定量の中で最も小さな分散を持つ推定量のことを言う。ただし，一般に，有効推定量が存在するとは限らない。詳しく知りたければ，数理統計学の教科書を参照されたい。

有効性よりもう少し強い条件で，線型不偏推定量に限定して考える（最小二乗推定量は線型推定量となっていることを思い出そう）。線型不偏推定量の中で最も小さな分散を持つ推定量のことを最良線型不偏推定量と言う。本節では，最小二乗推定量が，最良線型不偏推定量となっているかどうかを調べる。

まずは，$\hat{\beta}$ を取り上げる。前述のとおり，$\hat{\beta}$ を変形すると以下の通りとなる。

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \sum_{i=1}^{n}\omega_i Y_i$$

ただし，$\omega_i = \dfrac{(X_i - \overline{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$ とする。このように，$\hat{\beta}$ は線型不偏推定量であると言える。

もう一つ別の線型推定量を次のように考える。

$$\tilde{\beta} = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$$

ただし，$c_i = \omega_i + d_i$ とする。d_i は，ω_i を基準として，ω_i からの乖離部分と捉える。

$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 0$，$\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i = 1$ を利用して，$\tilde{\beta}$ を書き換えていくと，次のようになる。

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i)(\alpha + \beta X_i + u_i) \\ &= \alpha\sum_{i=1}^{n} \omega_i + \beta\sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i + \alpha\sum_{i=1}^{n} d_i + \beta\sum_{i=1}^{n} d_i X_i + \sum_{i=1}^{n} d_i u_i \\ &= \beta + \alpha\sum_{i=1}^{n} d_i + \beta\sum_{i=1}^{n} d_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i u_i + \sum_{i=1}^{n} d_i u_i\end{aligned}$$

と変形される。

次に，両辺の期待値をとると，

$$\mathrm{E}(\tilde{\beta}) = \beta + \alpha\sum_{i=1}^{n} d_i + \beta\sum_{i=1}^{n} d_i X_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{E}(u_i) + \sum_{i=1}^{n} d_i \mathrm{E}(u_i)$$

$$= \beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} d_i + \beta \sum_{i=1}^{n} d_i X_i$$

となる。$\tilde{\beta}$ が β の不偏推定量であるためには，

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i X_i = 0$$

の 2 つの条件が必要となる。

この 2 つの条件が成り立っていれば，$\tilde{\beta}$ は，

$$\tilde{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} (\omega_i + d_i) u_i$$

となる。このように，2 つの条件さえ満たせば，d_i がどのような値であったとしても，$\tilde{\beta}$ は線型不偏推定量となっていることがわかる。その意味で，β の線型不偏推定量は無数に存在すると言える。

さて，$\tilde{\beta}$ の分散は，補論の定理 (**??**)，(**??**)，誤差項の仮定 (iii) を利用して，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(\tilde{\beta}) &= \mathrm{V}(\beta + \sum_{i=1}^{n}(\omega_i + d_i)u_i) && \longleftarrow \tilde{\beta}\text{ を代入} \\
& && \text{補論の定理 (??) を利用} \\
&= \mathrm{V}(\sum_{i=1}^{n}(\omega_i + d_i)u_i)^2 \\
& && \text{補論の定理 (??) を利用} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\omega_i + d_i)^2\mathrm{V}(u_i) \\
& && \text{誤差項の仮定 (iii)}\ \ \mathrm{V}(u_i) = \sigma^2\text{ の利用，括弧内の展開} \\
&= \sigma^2(\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_i + \sum_{i=1}^{n}d_i^2) \\
& && \omega_i\text{，}d_i\text{ の性質を利用} \\
&= \sigma^2\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 + \sigma^2\sum_{i=1}^{n}d_i^2
\end{aligned}
$$

となる。最後の等式では，$\tilde{\beta}$ の不偏性の条件 $\sum d_i = 0$，$\sum d_i X_i = 0$ を利用して，

$$
\sum \omega_i d_i = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})d_i}{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i d_i - \overline{X}\sum_{i=1}^{n}d_i}{\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2} = 0
$$

が得られる。まとめると，$\tilde{\beta}$ の分散は，

$$
\mathrm{V}(\tilde{\beta}) = \sigma^2\sum_{i=1}^{n}\omega_i^2 + \sigma^2\sum_{i=1}^{n}d_i^2
$$

となる。一方，$\hat{\beta}$ の分散は,

$$\mathrm{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2$$

であったので,

$$\mathrm{V}(\tilde{\beta}) - \mathrm{V}(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \geq 0$$

となる。$\mathrm{V}(\tilde{\beta})$ と $\mathrm{V}(\hat{\beta})$ が等しくなる場合は，$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 0$，すなわち，$d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$ の場合となり，このとき $\tilde{\beta}$ は $\hat{\beta}$ に一致する。

よって，$\hat{\beta}$ は**最小分散線型不偏推定量**（minimum variance linear unbiased estimator），または，**最良線型不偏推定量**（best linear unbiased estimator）となっている。最小二乗推定量が最良線型不偏推定量になるという定理を**ガウス=マルコフの定理**（Gauss-Markov theorem）と呼ぶ。

$\hat{\alpha}$ についても，同様で，α の最小分散線型不偏推定量となる。証明は，まず，α のもう一つの線型不偏推定量を $\tilde{\alpha}$ を次のように表す。

$$\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + d_i) Y_i$$

そして，$d_1 = d_2 = \cdots d_n = 0$ のときを除いて，$\mathrm{V}(\tilde{\alpha}) > \mathrm{V}(\hat{\alpha})$ となることを示せばよい。証明の手順は $\hat{\beta}$ のときと全く同じである（証明略）。

今まで，様々な名称の推定量が出てきたが，それらの関係を集合の包含関係を用いて表すと，

$$\begin{aligned}&\text{最良線型不偏推定量，または，最小分散線型不偏推定量}\\&\qquad\subset\ \text{線型不偏推定量}\ \subset\ \text{線型推定量}\ \subset\ \text{推定量}\end{aligned}$$

となる。

(iii) 一致性（consistency）：　標本のサイズ n が大きくなると，推定量はその母数（パラメータ）に近づくというものが一致性という性質である。不偏推定量で，かつ，n が大きくなるにつれてその分散がゼロに収束するとき，**一致推定量**となることが知られている。分散がゼロに近づくにつれて，分布の幅がどんどん狭くなり，その代わりに，分布の高さがどんどん高くなっていく。分散がゼロの分布というのは，分布の幅がないという分布で，ある一点に集中した分布（概念上の分布）である。不偏推定量の場合は，その母数（パラメータ）に一点集中するような分布ということになる。

最小二乗推定量に関しては，$\mathrm{E}(\hat{\beta}) = \beta$，$\mathrm{E}(\hat{\alpha}) = \alpha$ となることが分かった。次に，n が大きくなると，$\mathrm{V}(\hat{\beta})$，$\mathrm{V}(\hat{\alpha})$ がゼロに収束するかどうかを調べる。既に求めた通り，$\mathrm{V}(\hat{\beta})$ は,

$$\mathrm{V}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

となる。43 ページの仮定 (vi) より，右辺の分母 $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ は n が大きくなるにつれて無限に大きくなるという仮定である。これが技術的な仮定と述べた理由である。ただ，技術的な仮定ではあるが，n が増えるにつれて，二乗したものがどんどん足し合わされていくので，無限大になるという仮定は現実的な仮定である。したがって，$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\mathrm{V}(\hat{\beta}) \longrightarrow 0$ となる。$\hat{\beta}$ は β の一致推定量となる。記号では,

$$\operatorname{plim} \hat{\beta} = \beta$$

と書く。plim（ピーリム）とは英語で probability limit の略である。日本語では**確率極限**と言い,「$\hat{\beta}$ の確率極限は β である」のように使う。

$\hat{\alpha}$ についても，同様に，その分散がゼロに収束するかどうかを調べる。

$$\mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \Big(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \Big)$$

となり，$n \longrightarrow \infty$ のとき，$\mathrm{V}(\hat{\alpha}) \longrightarrow 0$ となる。したがって，$\hat{\alpha}$ も α の一致推定量であると言える。すなわち，

$$\mathrm{plim}\ \hat{\alpha} = \alpha$$

と書くこともできる。

2.3.8　誤差項 (または，攪乱項) u_i の分散 σ^2 について

単回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

について，誤差項 (または，攪乱項) u_1，u_2，$\cdots$，u_n は互いに独立で，すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について $u_i \sim N(0,\ \sigma^2)$ を仮定した。

α，β を最小二乗法で推定した場合，

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i + \hat{u}_i$$

と書き表せることは，既に説明したとおりである。

u_i の分散 σ^2 の不偏推定量（以下では，s^2 で表す）は，

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{\text{自由度}}$$

として与えられる。ただし，単回帰の場合，

$$\text{自由度} = \text{標本数}（n）- \text{推定すべき係数パラメータの数}（2）= n - 2$$

推定すべき係数パラメータの数とは，α と β の 2 つなので 2 となる。$\hat{u}_i$ を書き換えると，誤差項 (または，撹乱項) の分散 σ^2 の不偏推定量 s^2 は，

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2$$

によって与えられる。

単回帰の場合，推定すべき係数パラメータの数は α，β の 2 であるが，重回帰の場合は β_1，β_2，$\cdots$，β_k の k となる。したがって，重回帰の場合，自由度は $n-k$ となる。

s^2 の不偏性の証明：　単回帰の場合，まず，次のように書き直す。

$$\begin{aligned} u_i &= Y_i - \alpha - \beta X_i = (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i) - \alpha - \beta X_i \\ &= (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta) X_i + \hat{u}_i \end{aligned}$$

2 つ目の等式では $Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{u}_i$ が代入されている。次に，左辺の u_i と 2 行目の右辺を二乗する。

$$u_i^2 = (\hat{\alpha} - \alpha)^2 + (\hat{\beta} - \beta)^2 X_i^2 + \hat{u}_i^2 + 2(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta) X_i + 2(\hat{\alpha} - \alpha)\hat{u}_i + 2(\hat{\beta} - \beta) X_i \hat{u}_i$$

さらに，両辺の総和をとる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n u_i^2 = n(\hat{\alpha} - \alpha)^2 &+ (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2 + 2(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta) \sum_{i=1}^n X_i \\ &+ 2(\hat{\alpha} - \alpha) \sum_{i=1}^n \hat{u}_i + 2(\hat{\beta} - \beta) \sum_{i=1}^n X_i \hat{u}_i \end{aligned}$$

$$= n(\hat\alpha - \alpha)^2 + (\hat\beta - \beta)^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \hat u_i^2 + 2n(\hat\alpha - \alpha)(\hat\beta - \beta)\overline{X}$$

最後の行では，**??**ページの**??**節の $\sum_{i=1}^n \hat u_i = 0$，$\sum_{i=1}^n X_i \hat u_i = 0$ という残差の性質を使っている。最後に，両辺について期待値をとる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\sum_{i=1}^n u_i^2) &= n\mathrm{E}((\hat\alpha - \alpha)^2) + \mathrm{E}((\hat\beta - \beta)^2)\sum_{i=1}^n X_i^2 + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n \hat u_i^2) \\
&\qquad +2n\mathrm{E}((\hat\alpha - \alpha)(\hat\beta - \beta))\overline{X} \\
&= n\mathrm{V}(\hat\alpha) + \mathrm{V}(\hat\beta)\sum_{i=1}^n X_i^2 + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^n \hat u_i^2) + 2n\mathrm{Cov}(\hat\alpha, \hat\beta)\overline{X} \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

$\hat\alpha$ の分散，$\hat\beta$ の分散，$\hat\alpha$ と $\hat\beta$ の共分散の定義が用いられている。既に求めたように，$\mathrm{V}(\hat\alpha)$，$\mathrm{V}(\hat\beta)$，$\mathrm{Cov}(\hat\alpha, \hat\beta)$ を ω_i で表すとそれぞれ次のようになる。

$$\mathrm{V}(\hat\alpha) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (\frac{1}{n} - \overline{X}\omega_i)^2 = \sigma^2(\frac{1}{n} + \overline{X}^2 \sum_{i=1}^n \omega_i^2)$$

$$\mathrm{V}(\hat\beta) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \omega_i^2$$

$$\mathrm{Cov}(\hat\alpha, \hat\beta) = -\sigma^2 \overline{X} \sum_{i=1}^n \omega_i^2$$

これらを，(2.10) に代入して，計算すると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} u_i^2) &= n\sigma^2(\frac{1}{n} + \overline{X}^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2) + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 (\sum_{i=1}^{n} X_i^2) + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2) - 2n\sigma^2 \overline{X}^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \\
&= \sigma^2 + \sigma^2 (\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2) \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2) \\
&= 2\sigma^2 + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2)
\end{aligned}$$

が得られる。最後の行では，$(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2) \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 = 1$ が利用されている。したがって，$\mathrm{E}(\sum u_i^2) = \sum \mathrm{E}(u_i^2) = n\sigma^2$ が $2\sigma^2 + \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2)$ に等しいということから，σ^2 は，

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2) = \mathrm{E}(s^2)$$

となる。すなわち，s^2 は σ^2 の不偏推定量となることがわかる。

s^2 に関連する分布の導出：　次に，s^2 の分布を考える。

1. すべての $i = 1, 2, \cdots, n$ について $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ なので，基準化すると $\dfrac{u_i}{\sigma} \sim N(0,\ 1)$ となり，標準正規分布に従う確率変数の二乗をすると

$$\frac{u_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$$

となる。

(*) $\chi^2(1)$ を「自由度 1 のカイ二乗分布」と読む。

2. さらに，u_1，u_2，$\cdots$，u_n は互いに独立を仮定しているので，それぞれの基準化の二乗和は,

$$\frac{\sum u_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

となる（すなわち，自由度 n のカイ二乗分布）。

(*) χ^2 分布については，**??**ページの補論**??**を参照されたい。

また，$u_i = Y_i - \alpha - \beta X_i$ を代入すると，

$$\frac{\sum u_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum (Y_i - \alpha - \beta X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

となる。

3. ここで，α，β をその最小二乗推定量 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ で置き換えると，自由度が推定したパラメータ数分減るので,

$$\frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$$

となる。

最後に，s^2 を使って，書き換えると,

$$\frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2} = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$$

が得られる。

手順を追って考えると，以上のようになる。今後，使うことになるのは，最後の分布に出てきた $\chi^2(n-2)$ 分布である。

s^2 の一致性の証明： σ^2 の推定量として，s^2 を

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2$$

とした。s^2 が σ^2 の不偏推定量となることは既に証明したとおりであるが，誤差項 u_i に正規分布の仮定を置かなくても不偏性の証明はできた。しかし，正規分布の仮定を置くと，より簡単に s^2 の不偏性の証明をすることができる。

$\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$ なので，χ^2 分布に従う確率変数の平均は自由度に等しく，その分散は自由度の 2 倍になることが知られている（証明略）。すなわち，

$$\mathrm{E}\Big(\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}\Big) = n-2, \qquad \mathrm{V}\Big(\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2}\Big) = 2(n-2)$$

となる。書き直すと，

$$\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2, \qquad \mathrm{V}(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-2}$$

を得る。「$\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$ で，しかも，$n \longrightarrow \infty$ のとき $\mathrm{V}(s^2) \longrightarrow 0$」が言えるので，$s^2$ は σ^2 の一致推定量である。記号では，

$$\mathrm{plim}\ s^2 = \sigma^2$$

と書くことができる。

　このように，χ^2 分布の自由度と平均・分散との関係から，s^2 の不偏性と一致性は簡単に証明することができる。

標準誤差について：　分散の推定値（または，推定量）の平方根を**標準誤差**と呼ぶ。回帰モデルの場合，2 種類の標準誤差がある。一つは誤差項 u_i の分散 σ^2 の推定値 s^2 の平方根 s，もう一つは回帰係数の推定量（すなわち，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$）の分散の推定値の平方根（後の記号では，単回帰で $s_{\hat{\alpha}}$，$s_{\hat{\beta}}$，重回帰で $s_{\hat{\beta}_j}$）である。区別するために，前者を**回帰式の標準誤差**（standard error of regression）と呼び，後者を**回帰係数の標準誤差**（standard error of coefficient）と呼ぶ。回帰係数の標準誤差については後述する。

数値例：　$\hat{\alpha} = 0.5$，$\hat{\beta} = 0.7$ なので，$\hat{Y}_i = 0.5 + 0.7X_i$，$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ により，$\hat{Y}_i$，$\hat{u}_i$ を計算する。

i	X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{u}_i$
1	5	4	25	20	4.0	0.0
2	1	1	1	1	1.2	−0.2
3	3	1	9	3	2.6	−1.6
4	2	3	4	6	1.9	1.1
5	4	4	16	16	3.3	0.7
合計	$\sum X_i$	$\sum Y_i$	$\sum X_i^2$	$\sum X_iY_i$	$\sum \hat{Y}_i$	$\sum \hat{u}_i$
	15	13	55	46	13	0.0
平均	$\overline{X}$	$\overline{Y}$				
	3	2.6				

誤差項 (または，攪乱項) の分散 σ^2 の不偏推定値 s^2 は,

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2 = \frac{1}{5-2}(0.0^2 + (-0.2)^2 + (-1.6)^2 + 1.1^2 + 0.7^2) = 1.43333$$

によって与えられる。回帰式の標準誤差は $s = \sqrt{1.43333} = 1.197$ となる。

2.3.9　$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分散の不偏推定量

$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の分散は,

$$\mathrm{V}(\hat{\alpha}) = \sigma_{\hat{\alpha}}^2 = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\right), \qquad \mathrm{V}(\hat{\beta}) = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

となった。

σ^2 をその不偏分散 s^2 に置き換えることによって，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分散 $\sigma_{\hat{\alpha}}^2$，$\sigma_{\hat{\beta}}^2$ の不偏推定量 $s_{\hat{\alpha}}^2$，$s_{\hat{\beta}}^2$ をそれぞれ次のように得ることができる。

$$s_{\hat{\alpha}}^2 = s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\right), \qquad s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{s^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

さらに，平方根をとって，$\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の標準誤差はそれぞれ,

$$s_{\hat{\alpha}} = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}}, \qquad s_{\hat{\beta}} = \frac{s}{\sqrt{\sum (X_i - \overline{X})^2}}$$

となる。

数値例： σ^2 の不偏分散は $s^2 = 1.43333$ なので，回帰係数の不偏分散は，

$$s^2_{\hat{\beta}} = \frac{s^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = 1.433333 \times 0.1 = 0.1433333$$

$$s^2_{\hat{\alpha}} = s^2(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}) = 1.433333 \times 1.1 = 1.5766667$$

となる。$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の標準誤差はそれぞれ，平方根をとって，回帰係数の標準誤差はそれぞれ

$$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786, \qquad s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565$$

となる。

2.3.10 $\hat{\alpha}$，$\hat{\beta}$ の分布（σ^2 が未知の場合）

σ^2 が既知のとき，$\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ の分布は (2.8)，(2.9) であるが，σ^2 が既知であるというのは現実的ではない。本節では，σ^2 が未知の場合，$\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ の分布を考える。σ^2 が未知の場合は t 分布（ティー分布）を利用することになるが，t 分布については補論**??**を参照されたい。

$\hat{\beta}$ の分布について：

(2.8) によると，$\hat{\beta}$ は平均 β，分散 $\sigma^2 \sum \omega_i^2$ である。このとき，$\hat{\beta}$ から平均 β を差し引いて，分散 $\sigma^2 \sum \omega_i^2$ の平方根で割ると（この変換を，正規化，標準化，または，基準化と呼ばれる），平均 0，分散 1 に変換される。さらに，正規分布の確率変数の線型変換もまた正規分布になるので（証明略），

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\sigma^2 \sum \omega_i^2}} = \frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\sigma^2 / \sum (X_i - \overline{X})^2}} \sim N(0,\ 1)$$

となる。

さらに，前節で見たように，

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

となる。

s^2 と $\hat{\beta}$ とは独立である。ただし，この証明はかなり煩雑になるので省略する。標準正規分布に従う確率変数，χ^2 分布に従う確率変数，両者が独立，加

えて，この 2 つの確率変数のある変換を行えば，t 分布に従う確率変数を導出することができる（補論**??**参照）。すなわち，

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/m}} = \frac{\dfrac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{\sum (X_i-\overline{X})^2}}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2}/(n-2)}} = \frac{\hat{\beta}-\beta}{s/\sqrt{\sum (X_i-\overline{X})^2}} \sim t(n-2) \quad (2.11)$$

補論**??**の Z，U，m はそれぞれ次のような対応となる。

$$Z = \frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{\sum (X_i-\overline{X})^2}} \sim N(0,\ 1)$$

$$U = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$$

$$m = n-2$$

結果だけを眺めると，σ を s で置き換えることによって，

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{\sum (X_i-\overline{X})^2}} \sim N(0,\ 1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\hat{\beta}-\beta}{s/\sqrt{\sum (X_i-\overline{X})^2}} \sim t(n-2)$$

となることがわかる。

$\hat{\alpha}$ について：

$\hat{\alpha}$ についても，$\hat{\beta}$ の分布の導出と同じ手順によって得られる。

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/m}} = \frac{\dfrac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{\overline{X}^2}{\sum (X_i-\overline{X})^2}}}}{\sqrt{\dfrac{(n-2)s^2}{\sigma^2}/(n-2)}} = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{s\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{\overline{X}^2}{\sum (X_i-\overline{X})^2}}} \sim t(n-2) \tag{2.12}$$

補論**??**の Z，U，m はそれぞれ次のような対応となる。

$$Z = \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{\overline{X}^2}{\sum (X_i-\overline{X})^2}}} \sim N(0,\ 1)$$

$$U = \frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$$

$$m = n - 2$$

結果的には，σ を s で置き換えて，

$$\frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sigma \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}}} \sim N(0,\ 1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{s \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}}} \sim t(n-2)$$

となる。

まとめ：

$\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ は次の分布に従う。

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2), \qquad \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{s_{\hat{\alpha}}} \sim t(n-2)$$

ただし，

$$s_{\hat{\beta}} = \frac{s}{\sqrt{\sum (X_i - \overline{X})^2}}, \qquad s_{\hat{\alpha}} = s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}}, \qquad s^2 = \frac{1}{n-2} \sum (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2$$

とする。$s_{\hat{\beta}}$ は $\hat{\beta}$ の標準誤差，$s_{\hat{\alpha}}$ は $\hat{\alpha}$ の標準誤差，s は回帰式の標準誤差とそれぞれ呼ばれる。

2.3.11　α，β の区間推定（信頼区間）

$\hat{\beta}$，$\hat{\alpha}$ の分布は，以下のように得られた。

$$\frac{\hat{\beta}-\beta}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2), \qquad \frac{\hat{\alpha}-\alpha}{s_{\hat{\alpha}}} \sim t(n-2)$$

$t_{\alpha/2}(n-2)$，$t_{1-\alpha/2}(n-2)$ をそれぞれ自由度 $n-2$ の t 分布の上側から $100\times\dfrac{\alpha}{2}$% 点，$100\times(1-\dfrac{\alpha}{2})$%点の値とする。ただし，同じ記号で紛らわしいが，この α と切片の α は異なるものなので注意されたい。このとき，自由度 $n-2$ の t 分布に従う確率変数が，区間 $(t_{1-\alpha/2}(n-2),\ t_{\alpha/2}(n-2))$ に入る確率は $1-\alpha$ となる。すなわち，次のように表される。

$$P\left(t_{1-\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta}-\beta}{s_{\hat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)\right) = 1-\alpha$$

t 分布はゼロを中心として左右対称なので，$t_{1-\alpha/2}(n-2) = -t_{\alpha/2}(n-2)$ となり，

$$P\left(-t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta}-\beta}{s_{\hat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)\right) = 1-\alpha$$

を得る。自由度 $n-2$ と両端の確率 α が決まれば，$t_{\alpha/2}(n-2)$ は t 分布表（**??** ページの付表 3）から得られる表中の数値である。

書き直して，

$$P\left(\hat{\beta} - t_{\alpha/2}(n-2)\times s_{\hat{\beta}} < \beta < \hat{\beta} + t_{\alpha/2}(n-2)\times s_{\hat{\beta}}\right) = 1-\alpha$$

と表される。

したがって，$\hat{\beta}$，$s_{\hat{\beta}}$ を推定値で置き換えて，信頼係数 $1-\alpha$ の β の信頼区間は，

$$\left(\hat{\beta} - t_{\alpha/2}(n-2)\times s_{\hat{\beta}},\ \hat{\beta} + t_{\alpha/2}(n-2)\times s_{\hat{\beta}}\right)$$

となる。

同様に，信頼係数 $1-\alpha$ (この α は確率) の α (この α は切片) の信頼区間は，$\hat{\alpha}$，$s_{\hat{\alpha}}$ を推定値で置き換えて，

$$\left(\hat{\alpha} - t_{\alpha/2}(n-2)\times s_{\hat{\alpha}},\ \hat{\alpha} + t_{\alpha/2}(n-2)\times s_{\hat{\alpha}}\right)$$

となる。

数値例：　今までと同様に，以下の数値例をとりあげる。

i	X_i	Y_i
1	5	4
2	1	1
3	3	1
4	2	3
5	4	4

この数値例をもとにして，回帰モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を推定した結果，**??** ページで係数推定値が得られ，81 ページではその標準誤差が次のように求められた。

$$\hat{\beta} = 0.7, \qquad s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786$$
$$\hat{\alpha} = 0.5, \qquad s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565$$

??ページの付表 3 から，自由度 3 (= 5 − 2) の t 分布の上側 2.5 % 点は 3.1824 なので，$t_{0.025}(3) = 3.1824$ となる。したがって，信頼係数 0.95 の傾き β の信頼区間は，

$$(0.7 - 3.1824 \times 0.3786,\ 0.7 + 3.1824 \times 0.3786) = (-0.505,\ 1.905)$$

となる。

切片 α については，信頼係数 0.95 の切片 α の信頼区間は,

$$(0.5 - 3.1824 \times 1.25565,\ 0.5 + 3.1824 \times 1.25565) = (-3.496,\ 4.496)$$

となる。

信頼係数の値を変えて，信頼係数 0.90 とすると，付表 3 から $t_{0.05}(3) = 2.3534$ なので，信頼係数 0.90 の傾き β の信頼区間は,

$$(0.7 - 2.3534 \times 0.3786,\ 0.7 + 2.3534 \times 0.3786) = (-0.191,\ 1.591)$$

となる。信頼係数 0.90 の切片 α の信頼区間は,

$$(0.5 - 2.3534 \times 1.25565,\ 0.5 + 2.3534 \times 1.25565) = (-2.455,\ 3.455)$$

となる。

注意： 信頼係数 0.90 の傾き β の信頼区間を例にとる。付表 3 から $t_{0.05}(3) = 2.3534$ なので,

$$\text{(i)}\quad P(\hat{\beta} - 2.3534 \times s_{\hat{\beta}} < \beta < \hat{\beta} + 2.3534 \times s_{\hat{\beta}}) = 0.90$$

と書き表すことはできる。しかし，$\hat{\beta}$，$s_{\hat{\beta}}$ をその推定値で置き換えて，

$$\text{(ii)}\quad P(\,0.5 - 2.3534 \times 1.25565 < \beta < 0.5 + 2.3534 \times 1.25565\,) = P(\,-2.455 < \beta < 3.455\,) = 0.90$$

とするのは間違いである。

(i) はもともと，$T \sim t(3)$ のとき，T から生成される値が $-2.3534 \sim 2.3534$ の範囲に入る確率が 0.9 という意味である。ただし，ここでの場合は $T = \dfrac{\hat{\beta} - \beta}{s_{\hat{\beta}}}$ である。(i) では $\hat{\beta}$ や $s_{\hat{\beta}}$ が確率変数である。(ii) については，β は確率変数ではなく，未知ではあるがある値をとるパラメータである。不等式 $-2.455 < \beta < 3.455$ の中に確率変数は存在しない。信頼係数 0.9 の β の信頼区間は $(-2.455,\ 3.455)$ と書くべきであって，$-2.455 < \beta < 3.455$ とするべきではない。

2.3.12　α，β の仮説検定

β_0 はある値が与えられているものとしよう。「未知パラメータの β は β_0 の値をとると言える」という仮説を検定したい場合を考えよう。検定したい仮説

を**帰無仮説**（H_0 で表す）と呼び，この帰無仮説に対する仮説を**対立仮説**（H_1 で表す）と呼ぶ。主に次のような仮説の立て方が一般的である。

(i)　帰無仮説 H_0：$\beta = \beta_0$,　対立仮説 H_1：$\beta \neq \beta_0$
(ii)　帰無仮説 H_0：$\beta = \beta_0$,　対立仮説 H_1：$\beta > \beta_0$
(iii)　帰無仮説 H_0：$\beta = \beta_0$,　対立仮説 H_1：$\beta < \beta_0$

帰無仮説は 3 つとも同じで「β が β_0 に等しい」である。対立仮説については，(i) は「β は β_0 と異なる」（どちらが大きいかは問わない），(ii) は「β は β_0 より大きい」（小さい方は考えない），(iii) は「β は β_0 より小さい」（大きい方は考えない）である。

(ii) は，β の最小二乗推定値 $\hat{\beta}$ の方が β_0 より大きい場合に用いられることが多い。(iii) は逆に，β の最小二乗推定値 $\hat{\beta}$ の方が β_0 より小さい場合に用いられることが多い。(ii) や (iii) は片方の場合（大きい場合，または，小さい場合）だけを考えればよく，**片側検定**という方法が使われる。それに対して，(i) は β が大きい場合，小さい場合の両方を考える必要があり，**両側検定**が用いられる。本書では，両側検定のみを扱う。片側検定については統計学の入門の教科書を参照されたい。

帰無仮説 H_0 ： $\beta = \beta_0$ に対して，対立仮説 H_1 ： $\beta \neq \beta_0$ を検定する。前節から，

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2)$$

という結果が得られた。この結果を利用すると，帰無仮説： H_0 : $\beta = \beta_0$ が正しいとき，β_0 を β に代入しても，

$$\frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2) \tag{2.13}$$

が成り立つ。

確率変数の関数は**統計量**と呼ばれる。統計量の中でも，検定のために使われる統計量のことを**検定統計量**という。本節で扱う帰無仮説を検定するための統計量，すなわち，検定統計量は (2.13) 式の $\dfrac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}}$ となる。

検定の手順は，次のとおりである。

1. データから推定値 $\hat{\beta}$，$s_{\hat{\beta}}$ を求めて，検定統計値 $\dfrac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}}$ を計算する。ただし，

$$\hat{\beta} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}, \qquad \hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}$$

$$\hat{u}_t = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n-2}\sum \hat{u}_t^2, \qquad s_{\hat{\beta}}^2 = \frac{s^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

である。

2. **有意水準** α を決めて（この α は，回帰式の定数項の α とは異なることに注意），自由度 $n-2$ の t 分布表（**??**ページの付表 3）から上側 $100 \times \alpha$ % 点の値を求める。通常，$\alpha = 0.01$，0.05 とする場合が多い。

   (*) 有意水準とは，帰無仮説が正しいときに棄却する確率のことであり，α で表すことが多い。

3. 自由度 $n-2$ の t 分布表から得られた $100 \times \alpha$ % 点の値と検定統計値の大小を比較する。すなわち，

$$\left| \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{s_{\hat{\beta}}} \right| > t_{\alpha/2}(n-2)$$

ならば，有意水準 α で帰無仮説 $H_0: \beta = \beta_0$ を棄却する。

(*) 上の不等式が成り立つ場合は，帰無仮説 $H_0: \beta = \beta_0$ を中心とした分布を考えるとき，データから得られた検定統計値は自由度 $n-2$ の t 分布の端にあり，H_0 は確率的に起こりにくいと考える。そのために，最初に立てた帰無仮説 H_0 は間違いだと判断することになる。

定数項 α の検定についても同様である。ただし，通常，定数項に関する区間推定や仮説検定を行うことは稀である。未知の関数を線型近似して最小二乗法を当てはめることになるので，データが存在する近傍で線型近似していて，説明変数 X がゼロというデータから遠く離れた切片の分析を行うことは実践ではあまり見られない。

以上のように，検定方法をまとめると次のようになる。帰無仮説を立てて，帰無仮説が正しいときの検定統計量の分布を求め，データから得られた検定統計値と検定統計量の分布を比較する。検定統計値が検定統計量の分布の端（右端でも左端でも）にあれば，帰無仮説が正しくないと判断し，帰無仮説を棄却する。有意水準によって，検定結果が変わることもあり得る。

t 値について

特に,「帰無仮説：H_0：$\beta = 0$，対立仮説：H_1：$\beta \neq 0$」の検定は特別の意味を持つ。帰無仮説のもとでは（「帰無仮説が正しいとき」と同じ意味），$\beta = 0$ を代入して,

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} \sim t(n-2)$$

の分布に従う。このときの検定統計量の値（すなわち，データで置き換えた $\dfrac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}$）を t 値と呼ぶ。Excel の出力結果では「t」，Gretl では「t 値」が，ここでの t 値に相当する。

$H_0 : \beta = 0$ という帰無仮説は，回帰式

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

において,「X_i が Y_i に何の影響も与えない」という仮説であることを意味する。

有意水準 α のもとで（この α は，回帰式の定数項の α とは異なることに注意），

$$\left|\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}\right| > t_{\alpha/2}(n-2)$$

ならば，有意水準 α で帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ を棄却する。

実証分析の手順は大まかに下記のとおりとなる。

1. 回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

において，経済理論から $\beta > 0$ という符号条件が想定されたとする。

2. 有意水準 α を決める。(例えば，$\alpha = 0.05$，0.01)

3. 実際のデータから，$\hat{\beta} > 0$ が得られた場合：

(a) t 値が，

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} > t_{\alpha/2}(n-2)$$

となった場合，帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ が棄却され，$\beta > 0$ が統計的にも証明され，経済理論は現実経済をサポートする結果となる。

(b) t 値が，

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} < t_{\alpha/2}(n-2)$$

となった場合，帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ を棄却できず，$\hat{\beta} > 0$ にもかかわらず，$\beta < 0$ の可能性もあるため，経済理論が現実経済を積極的には支持しない。

4. 実際のデータから，$\hat{\beta} < 0$ が得られた場合：

(a) t 値が，

$$-t_{\alpha/2}(n-2) < \frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}$$

となった場合，帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ を棄却できず，$\hat{\beta} < 0$ にもかかわらず，$\beta > 0$ の可能性もあるため，得られた推定結果と経済理論は完全に矛盾しているとは言えない。

(b) t 値が，

$$-t_{\alpha/2}(n-2) > \frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}}$$

となった場合，帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ は棄却され，統計的には $\beta < 0$ となり，得られた推定結果と経済理論は完全に矛盾している。すなわち，この場合，経済理論の立て直しが必要となる。

数値例：　今までと同様に，以下の数値例をとりあげる。

i	X_i	Y_i
1	5	4
2	1	1
3	3	1
4	2	3
5	4	4

回帰モデル $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ を推定した結果，以下の推定値を得た。

$$\hat{\beta} = 0.7, \qquad s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786$$

帰無仮説 H_0：$\beta = 0$，対立仮説 H_0：$\beta \neq 0$ の検定を行う。t 値は $0.7/0.3786 = 1.849$，有意水準 5 % の $t_{\alpha/2}(n-2)$ の値は 3.1824 となり（$\alpha = 0.05$，$n = 5$），

$$\frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = \frac{0.7}{\sqrt{0.1433333}} = 1.849 < t_{\alpha/2}(n-2) = 3.1824$$

を得る。このように，有意水準 5 % で帰無仮説 H_0：$\beta = 0$ は棄却されない。よって，β の符号は統計学的に確定できない。

　また，α についても同様に，t 値を計算できる。

$$\hat{\alpha} = 0.5, \qquad s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565$$

なので，t 値は,

$$\frac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = \frac{0.5}{\sqrt{1.5766667}} = 0.398 < t_{\alpha/2}(n-2) = 3.1824$$

となり，有意水準 5 % で H_0： $\alpha = 0$ を棄却できない。よって，α の符号も確定できないことになる。しかし，前述のとおり，定数項については，一般的に経済学的には意味が無い場合が多いので，定数項に関して仮説検定を行うことは少ない。

推定結果の表記方法：　回帰モデル：

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

の推定の結果, $\hat{\alpha} = 0.5$, $\hat{\beta} = 0.7$，$s_{\hat{\alpha}} = \sqrt{1.5766667} = 1.25565$，$s_{\hat{\beta}} = \sqrt{0.1433333} = 0.3786$，$\dfrac{\hat{\alpha}}{s_{\hat{\alpha}}} = 0.398$，$\dfrac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = 1.849$，$s^2 = 1.433333$（すなわち，$s = 1.197$），$R^2 = 0.5326$，$\overline{R}^2 = 0.3768$ を得た。これらをまとめて,

$$Y_i = \underset{(0.398)}{0.5} + \underset{(1.849)}{0.7} X_i$$

$$R^2 = 0.5326, \quad \overline{R}^2 = 0.3768, \quad s = 1.197$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は t 値を表すものとする。

または,

$$Y_i = \underset{(1.256)}{0.5} + \underset{(0.379)}{0.7} X_i$$

$$R^2 = 0.5326, \quad \overline{R}^2 = 0.3768, \quad s = 1.197$$

ただし，係数の推定値の下の括弧内は標準誤差を表すものとする。

のように書く。