4.4　消費関数

4.4.1　古い消費関数（1940 ~ 1960 年代）

C_t： 消費
Y_t： 所得（特に，可処分所得）

$$C_t = \alpha + \beta Y_t$$

α： 基礎消費
β： 限界消費性向

習慣効果を取り入れる。

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + \gamma C_{t-1}$$

C_{t-1}： 習慣効果

4.4.2　新しい消費関数（1980 ~ 2000 年代）

簡単化のために 2 期間で考える。
この場合 2 期目は貯蓄せず消費を増やすほうが効用は増加する。
$\Longrightarrow$　2 期間で所得 y_1，y_2 を使い切る。

最大化問題は次の通り。

$$\max_{c_1,c_2,s} u(c_1) + \beta u(c_2) \qquad \text{subject to} \qquad y_1 = c_1 + s \quad \text{and} \quad y_2 + (1+r)s = c_2$$

c_1： 1 期目の消費
c_2： 2 期目の消費
β： 割引率
s： 1 期目の貯蓄
r： 1 期目の金利（例えば，銀行の定期預金金利）

$\Longrightarrow$　時間が入り動学的最適化問題

s を消去して,

$$\max_{c_1,c_2} u(c_1) + \beta u(c_2) \qquad \text{subject to} \qquad y_1 + \frac{y_2}{1+r} = c_1 + \frac{c_2}{1+r}$$

を解く。ラグランジェ関数：

$$L = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda(y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r})$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = u'(c_1) - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_2} = \beta u'(c_2) - \frac{\lambda}{1+r} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} = 0$$

上 2 式から,

$$u'(c_2) = \frac{1}{\beta(1+r)} u'(c_1)$$

となる（r は時点 1 である）。

　時点 1，2 を t，$t+1$ と置き換えると,

$$u'(c_{t+1}) = \frac{1}{\beta(1+r_t)} u'(c_t)$$

となる。

● $u(c) = -(c - \overline{c})^2$ とすると，

$$-(c_{t+1} - \overline{c}) = -\frac{1}{\beta(1+r_t)}(c_t - \overline{c}) \quad \Longrightarrow \quad c_{t+1} = \overline{c} + \frac{1}{\beta}\frac{c_t}{1+r_t} - \frac{\overline{c}}{\beta}\frac{1}{1+r_t}$$

となる。添え字 2 を $t+1$ に，添え字 1 を t に付け替える。ただし，金利は 1 期のものとしているため，添え字を t とした。

推定式は,

$$c_{t+1} = \beta_1 + \beta_2 \frac{c_t}{1+r_t} + \beta_3 \frac{1}{1+r_t}$$

となる。

● $u(c) = \alpha \log c$ とすると，

$$\frac{\alpha}{c_{t+1}} = \frac{1}{\beta(1+r_t)}\frac{\alpha}{c_t} \quad \Longrightarrow \quad c_{t+1} = \beta(1+r_t)c_t$$

となる。

推定式は,

$$c_{t+1} = \beta_0 + \beta(1+r_t)c_t$$

となる。

より一般的に：　下記の将来にわたる効用最大化問題を解く。

$$\max_{c_1, c_2, \cdots} \sum_{t=0}^{\infty} u(c_t) \qquad \text{subject to} \qquad A_{t+1} = R_t(A_t + y_t - c_t)$$

c_t：t 期の消費
A_t：t 期首の資産
r_t：t 期の金利
$R_t = 1 + r_t$
β：割引率

$c_t = -\dfrac{A_{t+1}}{R_t} + A_t + y_t$ を代入すると，最大化問題は,

$$\max_{A_1, A_2, \cdots} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\Big(-\frac{A_{t+1}}{R_t} + A_t + y_t\Big)$$

となる。

A_t について微分して，ゼロとおく。すなわち，

$$-\frac{1}{R_{t-1}}\beta^{t-1}u'\left(-\frac{A_t}{R_{t-1}}+A_{t-1}+y_{t-1}\right)+\beta^t u'\left(-\frac{A_{t+1}}{R_t}+A_t+y_t\right)$$

となり，括弧内を c_t で表しなおすと，

$$u'(c_{t+1})=\frac{1}{\beta R_t}u'(c_t)$$

となる。　$\Longrightarrow$　2 期モデルと同じ

4.4.3　データ

● 家計最終消費支出：

内閣府 `https://www.cao.go.jp/`

右側の「統計情報・調査結果」

「国民経済計算（GDP 統計）（四半期、年次）：基幹統計（加工統計）」

「統計表一覧」

I. 国内総生産（支出側）及び各需要項目「実質季節調整系列（CSV 形式：40KB）」

$\longrightarrow \quad c_t$

● 金利データ：

日銀ホームページ `https://www.boj.or.jp/`

左タブ「統計」

「時系列統計データ検索サイト」

（`https://www.stat-search.boj.or.jp/index.html` でも可）

「統計データ検索」

「金利（預金・貸出関連）」

「定期預金の預入期間別平均金利 [IR03]」 $\longrightarrow \quad r_t$