統計学

谷崎　久志 (神戸大学 経済学部)

1　統計学の基礎

日常生活において統計データに接する機会は非常に多い。例えば，新聞やニュースで「内閣の支持率が 48%から 52%に上昇した」といったことを度々耳にするが，これは本当に支持率が上昇したと判断して良いのであろうか。また，数学の試験を行った。このとき，2 つのクラスで平均点を比較した場合，A 組では 60 点，B 組では 63 点という結果となった。「B 組の方が A 組より成績優秀だ」と判断して良いものだろうか。さらに，2 つの製薬会社が風邪薬を作り，薬の効いている時間を測ったところ，A 社の薬は平均で 13 時間，B 社は平均で 14 時間という結果となった。この場合,「B 社の風邪薬が A 社のもよりも良く効く」と結論づけることは適当なのか。これらのような問に答えるためには，統計学の知識が必要とされる。統計学の目的はデータを集め解析して新しい知識や事実を知り，その結果に基づいて行動をとること (すなわち，応用すること) である。

統計学は 2 つの分野に分けられる。データを収集したり要約したりすることに関する統計的方法を記述統計と言う。データの源泉に関して結論を引き出すことの統計的方法は推測統計と呼ばれる。統計学の最終的な目的は，推測を行うことであるので，前者は後者の予備的段階とみなされる。

記述統計とは，度数分布表やヒストグラムの作成から始まり，平均 (算術平均)・分散 (算術分散)・メジアン (中央値)・モード (最頻値) 等から，データの性質を導き出すことであり，資料の整理が中心課題である。ヒストグラムを見ると，データのばらつき・歪み・尖り等の様子が視覚的に分かる。これに対して，平均 (算術平均)・分散 (算術分散)・メジアン (中央値)・モード (最頻値) 等は，このヒストグラムの形状を数字で表すものである。

推測統計とは，記述統計で行われたデータ解析によって得られたヒストグラムの形状を，ある関数 (すなわち，分布関数，後述の例では，標準正規分布) で近似し，この分布関数に基づいて平均 (数学的期待値)・分散等を数学的に算出し，推定 (点推定，区間推

定) や検定を行うものである。以下に，統計学の大まかな内容を示しておく。

まず資料の整理を目的とした度数分布表やヒストグラムの作成である。平均，分散，標準偏差等の求め方とその意味を知ることは重要である。これらは，先に述べた記述統計の内容である。

次に，資料を整理して得られたヒストグラムを何らかの数学的な関数 (この関数を確率分布関数と呼ぶ) で近似することから推測が可能になるため，確率分布関数という概念が導入される。分布関数の種類には様々なものが考え出されているが，代表的な分布関数はベルヌイ分布，2 項分布，一様分布，正規分布，カイ自乗分布，F 分布，t 分布である。この中でも正規分布が最重要である。世の中で起こり得るすべての事項は正規分布で近似できるとまで言われている。さらに，正規分布からカイ自乗分布，F 分布，t 分布が数学的に導き出せるのである。記述統計で学んだ期待値 (または，平均)，分散，標準偏差とこれらの分布関数との関連を知ることが次の段階である。

期待値 (平均) の推定には点推定，区間推定の 2 種類がある。平均や分散は通常，未知である。例えば，大学生の身長の平均を求める場合，何人かを選び出してその人達の平均を求める。果たして，この得られた平均は本当の大学生の身長の平均なのか？　別のグループの人達を選び出すと，恐らく異なった平均値が得られるであろう。このように，グループの選び出し方によって平均値は異なるため，真の平均は未知であると考えることが出来るのである。何らかのデータから未知であるものを求めることを「推定する」と言う。すべてのデータを調べることは不可能であるために，その一部のデータを取り出し，推定が行われるのである。推定には点推定，区間推定の 2 種類があり，文字通りの意味である。一般的に言われる推定とは点推定である。例えば，平均寿命 85 才，平均身長 170cm，テストの平均 60 点等はある数字一つを求めている。これに対して，区間推定とは，ある幅をもって推定することである。例えば，平均身長は 95%の確率で 165cm から 175cm の間にあるといった言い方をする。区間推定には，各種の統計表 (正規分布表，t 分布表，F 分布表，カイ自乗分布表) の利用が不可欠である。

最後に，統計学では検定問題を扱う。検定問題とは，先に述べたように,「内閣の支持率が 48%から 52%に上昇した」，数学の試験で「B 組の方が A 組より成績優秀だ」2 つの風邪薬で「B 社の風邪薬が A 社のもよりも良く効く」等の内容が確かにそう言えるのかを調べるものである。現実の世界では，これらの内容が偶然に起こったかもしれないのである。別のデータを用いて調べると逆の事柄が起こるかもしれない。ほとんどの確率でこの種の内容が言えるかどうかを調べるのが検定である。検定問題にも，各種の統計表 (正規分布表，t 分布表，F 分布表，カイ自乗分布表) の利用が必要とされる。

次節では，平均を例にとって，推定・検定の方法を簡単に示す。

2　平均の検定・推定 (例)

母集団は平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従う (X_i が平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うことは，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ と表記される) ものと仮定する。簡単化のために，母集団の分散 σ^2 を既知とする。

母集団から取り出された n 個の要素から成る標本 ($X_1, X_2, \cdots, X_n$) を用いて，母集団の平均 μ に関する推定，検定を行うことを考える。

n 個の要素は互いに独立で同一の分布に従うものとする。同一の分布とは，この場合，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ はすべて平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うものと仮定するということである。

母集団の平均の点推定：　母集団の平均 μ の推定量を $\overline{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする。$\overline{X}$ を母平均 μ の推定量とする根拠は，いくつか考えられる。特に重要なことは，$\overline{X}$ は推定量の持つべき望ましい性質 (不偏性，一致性，有効性等) をすべて持っている推定量となっているのである。しかも，$\overline{X}$ が母平均 μ の推定量に相応しいと考えるのは，直感的にも，正しく感じられるであろう。

母集団の平均の信頼区間：　$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ のとき，$\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ となり，基準化 (または，標準化) することによって，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ を得る。$N(0,1)$ は標準正規分布を表し，たいていの統計学の教科書には正規分布表が用意され，その表で確率を求めることになる。たとえば，下の式は，標準正規分布の確率変数が $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ と $z_{\frac{\alpha}{2}}$ の間に入る確率は $1-\alpha$ であることを意味する。

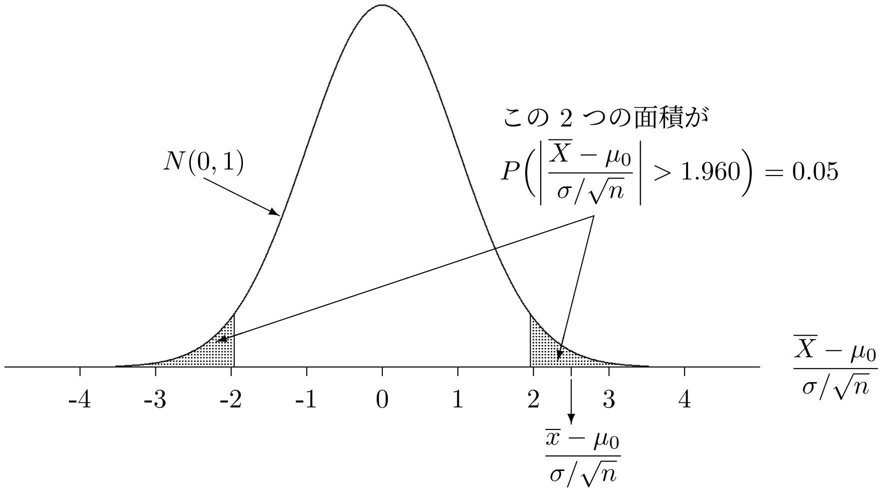
$$P(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

すなわち，α の値を決めると，その α に応じた $z_{\frac{\alpha}{2}}$ の値が正規分布表から得られる。$\alpha = 0.01, 0.05$ が実際には用いられる (それぞれ，1 パーセント，5 パーセント)。$\alpha = 0.01$ のとき $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.576$，$\alpha = 0.05$ のとき $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.960$ が正規分布表から得られる。さらに，μ について解くと，

$$P(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$

となる。これは，母平均 μ が，$\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}$ と $\overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}$ との間にある確率は $100\times(1-\alpha)$ であると読むことが出来る。したがって，母集団の平均 μ の $100\times(1-\alpha)\%$ 信頼区間は，$\overline{X}$ を $\overline{x}$ で置き換えて，$(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n})$ によって与えられる。

図 1　$P\Big(\Big|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\Big| > z_{\frac{\alpha}{2}}\Big)$ となる領域



ただし，$\overline{x} = (1/n)\sum_{i=1}^n x_i$ で，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ にはそれぞれ実際に観測されたデータの値が入っているものとする。すなわち，x_i は X_i の実現値であると言われる。

母集団の平均の仮説検定：　仮説検定について，検定したい仮説を帰無仮説と呼び，H_0 によって表される。また，帰無仮説に対する仮説を対立仮説と呼び，H_1 によって表される。今，$H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$ を考える。ただし，μ_0 はある値とする。すなわち，母集団の平均 μ を μ_0 という値をとるかどうかを検定する。とりあえず，帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が正しい判断であると考える。このとき，

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ \sim\ N(0,1)$$

となる。したがって，

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{または}, \quad \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

となる確率は α である。確率変数 $\overline{X}$ を実現値 $\overline{x}$ で置き換えて，

$$\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_{\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{または}, \quad \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{\frac{\alpha}{2}}$$

であれば，帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ が起こる確率は低く，α 以下となる。よって，最初に立てた仮説が起こりにくいと考え，帰無仮説 $H_0: \mu = \mu_0$ を棄却することになる。

例えば，図 1 は標準正規分布の確率を表す。横軸と曲線との間にはさまれる部分の面積は 1 となる。影の部分は，横軸で -1.96 より小さいか，または，1.96 より大きい確率を表し，この場合は 5% である。すなわち，図 1 では，$\alpha = 0.05$, $z_{0.025} = 1.96$ の場合を考えている。仮に，$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ が，1.96 よりも大きいか，または，-1.96 より小さければ，$\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ が起こりうる確率は 5% 以下となり，帰無仮説が正しいというもとでは起こりにくということになる。したがって，この場合は最初に立てた帰無仮説に問題があったのだという結論になり，帰無仮説を棄却するのである。

次節では，統計学がどのように経済学に応用されるのかということを，例をあげて考える。

3 統計学の経済学への応用

経済学の分野において統計学を勉強する理由の一つとしては，経済理論が本当に現実経済を説明しているかどうかを，統計学を利用することによって，調べることが出来るからである。

統計学を用いると，経済理論から得られた関係式が現実妥当性があるかどうかを実際に得られたデータを用いて検証することができる (この分野を計量経済学と言う)。例えば，マクロ経済学における消費関数の例を挙げると，消費 (C) は可処分所得 (Yd) の関数であることが知られている。所得から税金を差し引いたものを可処分所得と呼ぶが，可処分所得が増えれば消費も増えるということは日常生活においても理解され得ることであろう。この関数を $C = a + bYd$ という線形 (一次式) によって表されると仮定しよう。この場合，経済学では，a は基礎消費，b は限界消費性向と呼ばれる。a で表される基礎消費とは所得がなくても日常生活に最低限必要な消費 (すなわち，衣食住宅費等) であり，b の限界消費性向とは所得が 1 円増えれば消費はいくら増えるのかという指標である。a, b はパラメータと呼ばれ，述べるまでもなく未知である。C や Yd は『国民経済計算年報』(経済企画庁編) から「家計最終消費支出」「家計国民可処分所得」という項目で，それぞれ毎年毎年のデータは公表されている。この未知であるパラメータ a, b は現実に得られた C と Yd のデータから最小自乗法という推定方法を用いて求められる (「推定される」という言葉が使われる)。b の推定された値 (推定値) は 0.8 程度であることが知られている。この 0.8 という数字をどのように解釈すればいいのであろうか。通常用いられる C や Yd のデータには誤差が含まれるため，誤差の含まれたデータを用いて推定した未知パラメータ b の値 (すなわち，0.8) にも誤差が含まれていると考えられる。全く同じような現実とは別の世界を仮想し，そこから得られたデータを用いて再び推定すると

0.84 という数字が推定されるかもしれないのである。このように 0.8 という数字は偶然得られたものと考えることも可能なのである。統計学をここに応用すると，例えば「本当の未知パラメータ b の値が 0.75 から 0.85 の間にある確率は 95%である」という解答が見つけ出されるのである。全く同じように仮想された別の世界で得られた 0.84 という数字は，0.75 から 0.85 の間にあるため，95%で起こり得る値であり，この意味で 0.8 と 0.84 という数字には大きな差はないと判断することが出来るのである。0.8 という数字は「点推定」，0.75 から 0.85 の区間を「信頼区間 (または，区間推定)」，0.8 と 0.84 の 2 つの数字は差があるかどうかは「検定」という統計学の用語に置き換えることが出来る。

このように，統計学を応用することによって，現実の経済データから意味のある数字を引き出すこと，さらに，得られた数字をいかに解釈すべきか，が可能となる。換言すれば，経済理論で得られた関係が現実経済に合うかどうかを調べる (「実証する」という用語を用いる) ことが出来るようになるのである。

ここでは，消費関数の例を挙げたが，その他にも経済理論に関連する全ての事柄を現実に得られたデータを用いて実証することが出来る。ミクロ理論 (価格理論) の需要分析においては，商品のの価格が上 (下) がればその需要が下 (上) がると言われる。また，企業の投資理論においては，需要見込みがあれば企業は投資を増やし，銀行からの資金の借り入れ利子が上昇すれば投資を減らすと言われている。これらのことが実際に現実の経済状況に対応しているかどうかを，統計学を利用して，検証することが出来るのである。

統計学の参考書

1. 国沢清典・羽島裕久 『数理統計演習』 サイエンス社，1977 年。
2. ホーエル (浅井・村上訳) 『初等統計学』 培風館，1963 年。
3. 豊田利久編 『基本統計学』 東洋経済，1991 年。
4. 森棟公夫 『統計学入門』(第 2 版)　新世社，2000 年。

計量経済学の参考書

1. 小川一夫，玉岡雅之，得津一郎 『マクロ経済学』 有斐閣，1991 年。
2. 羽森茂之 『計量経済学』 中央経済社，2000 年。
3. 森棟公夫 『計量経済学』 東洋経済，1999 年。
4. 山本拓 『計量経済学』 新世社，1995 年。