統計推理論

谷﨑　久志 (神戸大学 経済学部)

本学経済学部一年生向けのテキスト『基本統計学 (第 2 版)』(豊田他，東洋経済新報社，2002 年) の P.86 に次の定理 6.5 がある。

> **定理 6.5**　n 個の確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ は互いに独立で，すべての i について，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ となるものとする。このとき，$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ となる。ただし，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ とする。

定理 6.5 の証明はかなり複雑で，学部向けの講義「統計学」では証明を行わない。しかし，大学院向け講義「上級統計推理論」では証明がなされる。これは統計学で最も重要な定理であり，本稿ではこの定理の証明を行う。なお，以下に出てくるページや定理番号はすべて『基本統計学 (第 2 版)』のものを表すものとする。

証明を次の手順で行うことにする。

(i) $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma$ と $(n-1)S^2/\sigma^2$ は独立で，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$，$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ となる (P.83 の定理 6.3)。

- (a) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-\mu)^2$ となる。
- (b) $X_1 = nY_1 - Y_2 - \cdots - Y_n,\ X_2 = Y_2,\ \cdots,\ X_n = Y_n$ としたときに，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ の結合分布を求める。
- (c) $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ となる (P.66 の下から 7 行目)。
- (d) $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$ となる (P.66 の下から 5 行目)。
- (e) 自由度 k のカイ二乗分布の積率母関数は $\phi_{\chi^2(k)}(\theta) = (1-2\theta)^{-\frac{k}{2}}$ となる。
- (f) $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma$ と $(n-1)S^2/\sigma^2$ は独立で，$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ となる (P.83 の定理 6.3)。

(ii) $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/S \sim t(n-1)$ となる (P.86 の定理 6.5)。

(a) $Z \sim N(0,1)$ と $U \sim \chi^2(k)$ は独立とするとき，$T = Z/\sqrt{U/k} \sim t(k)$ となる (P.86 の定理 6.4)。

(b) $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/S \sim t(n-1)$ となる (P.86 の定理 6.5)。

以下に，各項目を順番に証明する。

(i)(a) の証明: $\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}) = 0$ に注意して，$\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2$ は次のように変形される。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2 &= \sum_{i=1}^n \big((X_i-\overline{X}) + (\overline{X}-\mu)\big)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2 + 2\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})(\overline{X}-\mu) + \sum_{i=1}^n (\overline{X}-\mu)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2 + n(\overline{X}-\mu)^2
\end{aligned}
$$

(i)(b) の導出: $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立で，$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする。このとき，X_i の密度関数 $f_x(x_i)$ は，

$$
f_x(x_i) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\big(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\big) \tag{1}
$$

と表される。よって，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の同時密度関数 $f_x(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は，

$$
\begin{aligned}
&f_x(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\big(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\big) \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\big(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2 - \frac{1}{2\sigma^2/n}(\overline{x}-\mu)^2\big) \\
&= \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}(2\pi\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}} \exp\big(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\overline{x})^2\big) \times \frac{1}{(2\pi\sigma^2/n)^{\frac{1}{2}}} \exp\big(-\frac{1}{2\sigma^2/n}(\overline{x}-\mu)^2\big)
\end{aligned}
$$

となる。2 行目では，(i)(a) で行われた変形が用いられている。

今，次のような変換を考える。

$$
X_1 = nY_1 - Y_2 - \cdots - Y_n, \quad X_2 = Y_2, \quad \cdots, \quad X_n = Y_n
$$

この変換では，$Y_1 = \overline{X}$ となっていることに注意せよ。このとき，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ の結合分布を $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ とすると，$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = |J| f_x(ny_1 - y_2 - \cdots - y_n, y_2, \cdots, y_n)$

として求められる。ただし，ヤコビアン J は,

$$J = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial y_1 & \cdots & \partial x_1/\partial y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_n/\partial y_1 & \cdots & \partial x_n/\partial y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{vmatrix} = n$$

となる。$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を変形すると,

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= f(y_2, \cdots, y_n|y_1)f(y_1) \\ &= \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}} \exp\bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}(ny_1 - y_2 - \cdots - y_n)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(y_i - y_1)^2\bigr) \\ &\quad \times (2\pi\sigma^2/n)^{-\frac{1}{2}} \exp\bigl(-\frac{1}{2\sigma^2/n}(y_1-\mu)^2\bigr) \end{aligned}$$

と表される。すなわち,

$$\begin{aligned} f(y_2, \cdots, y_n|y_1) &= \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}} \exp\bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}(ny_1 - y_2 - \cdots - y_n)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=2}^{n}(y_i - y_1)^2\bigr) \\ f(y_1) &= (2\pi\sigma^2/n)^{-\frac{1}{2}} \exp\bigl(-\frac{1}{2\sigma^2/n}(y_1-\mu)^2\bigr) \end{aligned}$$

となる。$f(y_2, \cdots, y_n|y_1)$，$f(y_1)$ は，Y_1 を与えたもとで $Y_2, \cdots, Y_n$ の条件付密度関数, Y_1 の密度関数をそれぞれ表す。

(i)(c) の証明： (1) 式の $f_x(x_i)$ は $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ の密度関数である。$f_x(x_i)$ と $f(y_1)$ を比較すると，Y_1 は平均 μ，分散 σ^2/n の正規分布従うことが分かる ($f(x_i)$ の σ^2 を σ^2/n で置き換えると，$f(y_1)$ となる)。すなわち，$Y_1 = \overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ となる。

(i)(d) の証明： $Z = \sqrt{n}(Y_1 - \mu)/\sigma$ として，Z の密度関数 $f_z(z)$ を求めると,

$$f_z(z) = \Bigl|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y_1}\Bigr| f(z\sigma/\sqrt{n} + \mu) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}z^2)$$

となる。これは，(1) 式の $\mu = 0$，$\sigma^2 = 1$ のケースに相当する。このように，$f_z(z)$ は, 平均ゼロ，分散 1 の正規分布の密度関数 (すなわち，標準正規分布) となる。したがって, $Z = \sqrt{n}(Y_1 - \mu)/\sigma = \sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ が得られる。

(i)(e) の証明: 自由度 k のカイ二乗分布の密度関数 $f_\chi(x)$ は,

$$f_\chi(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} \exp\bigl(-\frac{1}{2}x\bigr) \tag{2}$$

として表される。$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数と呼ばれ，$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ と定義される。自由度 k のカイ二乗分布の積率母関数 $\phi_{\chi^2(k)}(\theta)$ は，

$$
\begin{aligned}
\phi_{\chi^2(k)}(\theta) = \mathrm{E}\big(\exp(\theta X)\big) &= \int_0^\infty \exp(\theta x) f_\chi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \exp(\theta x)\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{\frac{k}{2}-1}\exp\big(-\frac{1}{2}x\big)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{\frac{k}{2}-1}\exp\big(-\frac{1}{2}(1-2\theta)x\big)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}\Big(\frac{y}{1-2\theta}\Big)^{\frac{k}{2}-1}\exp(-\frac{1}{2}y)\frac{1}{1-2\theta}\mathrm{d}y \\
&= (1-2\theta)^{-\frac{k}{2}}\int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}y^{\frac{k}{2}-1}\exp(-\frac{1}{2}y)\mathrm{d}x = (1-2\theta)^{-\frac{k}{2}} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

と表される。下から 2 行目では，$y=(1-2\theta)x$ が使われる。最後の行の積分の中の関数は自由度 k のカイ二乗分布の密度関数 ((2) 式参照) となっていることに注意せよ。

(i)(f) の証明： $Y_1=y_1$ を与えたもとで，$Y_2,\cdots,Y_n$ の条件付分布 $f(y_2,\cdots,y_n|y_1)$ を考える。$(ny_1-y_2-\cdots-y_n)^2+\sum_{i=2}^n(y_i-y_1)^2=q$ とおいて，$\int\cdots\int f(y_2,\cdots,y_n|y_1)\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n=1$ を利用すると，

$$
\int\cdots\int \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}q)\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n = 1 \qquad (4)
$$

と書き表される。$\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2=(nY_1-Y_2-\cdots-Y_n)^2+\sum_{i=2}^n(Y_i-Y_1)^2=Q$ に注意して，$Y_1=y_1$ を与えたもとで，Q/σ^2 の条件付積率母関数を求めると，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\big(\exp(\theta Q/\sigma^2)|y_1\big) = \int\cdots\int \exp(\theta q/\sigma^2)f(y_2,\cdots,y_n|y_1)\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n \\
&= \int\cdots\int \exp(\theta q/\sigma^2)\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}q)\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n \\
&= \int\cdots\int \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}}}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2/(1-2\theta)}q)\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n \\
&= (1-2\theta)^{-\frac{n-1}{2}}\int\cdots\int \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\big(2\pi\sigma^2/(1-2\theta)\big)^{\frac{n-1}{2}}}\exp(-\frac{1}{2\sigma^2/(1-2\theta)}q)\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n \\
&= (1-2\theta)^{-\frac{n-1}{2}} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となる。4 行目の積分値は，(4) の積分内の関数 (すなわち，$f(y_2,\cdots,y_n|y_1)$) に含まれる σ^2 を $\sigma^2/(1-2\theta)$ で置き換えたものに等しいので，1 になる。この積率母関数は $Y_1=y_1$ に依存しないので，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ の同時密度関数は Y_1 の密度関数と $Y_2,\cdots,Y_n$ の密度関数との積の形で表される。すなわち，$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=f(y_2,\cdots,y_n)f(y_1)$ として書き表すことが出来る。したがって，$Q=(nY_1-Y_2-\cdots-Y_n)^2+\sum_{i=2}^n(Y_i-Y_1)^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2=(n-1)S^2$ と $Y_1=\overline{X}$ は独立であると言える。よって，$(n-1)S^2/\sigma^2$ と $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma$ は独立となる。

さらに，(3) 式と (5) 式の積率母関数の形を比べて，$k=n-1$ とすると，$Q/\sigma^2=(n-1)S^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$ が得られる。

(ii)(a) の証明: $Z\sim N(0,1)$ と $U\sim\chi^2(k)$ は独立とするとき，$T=Z/\sqrt{U/k}\sim t(k)$ となることを示す。

$X=Z/\sqrt{U/k}$，$Y=U$ として，変数変換を行い，X の密度案数を求める。変形して，$z=x\sqrt{y/k}$，$u=y$ とする。ヤコビアンは，

$$J=\begin{vmatrix}\partial z/\partial x & \partial z/\partial y\\ \partial u/\partial x & \partial u/\partial y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sqrt{y/k} & \frac{1}{2}x/\sqrt{ky}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\sqrt{\frac{y}{k}}$$

となる。$f_{xy}(\cdot,\cdot)$，$f_{zu}(\cdot,\cdot)$，$f_z(\cdot)$，$f_u(\cdot)$ を X と Y の結合密度関数，Z と U の結合密度関数，Z の密度関数 (すなわち，標準正規分布)，U の密度関数 (すなわち，自由度 k のカイ二乗分布) とする。X と Y の結合密度関数 $f_{xy}(x,y)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}f_{xy}(x,y)&=|J|f_{zu}(x\sqrt{y/k},y)=|J|f_z(x\sqrt{y/k})f_u(y)\\&=\sqrt{\frac{y}{k}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2k}x^2y)\times\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}y^{\frac{k}{2}-1}\exp(-\frac{1}{2}y)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi k}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}}y^{\frac{k+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{1}{2}(1+x^2/k)y\right).\end{aligned}$$

2 つ目の等号は，Z と U が独立という仮定に基づく。$f_{xy}(x,y)$ を y について積分して，X の周辺密度関数 $f(x)$ は，

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^\infty f_{xy}(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi k}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}}y^{\frac{k+1}{2}-1}\exp\left(-\frac{1}{2}(1+x^2/k)y\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{\left(2(1+x^2/k)^{-1}\right)^{\frac{k+1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi k}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}}\end{aligned}$$

$$\times \int_0^\infty \frac{1}{\left(2(1+x^2/k)^{-1}\right)^{\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} y^{\frac{k+1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(1+x^2/k)y\right) \mathrm{d}y$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} \tag{6}$$

となる。(6) 式は自由度 k の t 分布の密度関数に対応する。よって，$T = Z/\sqrt{U/k} \sim t(k)$ が得られる。なお，下から 2 行目の積分内の密度関数は，パラメータ $\alpha = (k+1)/2$, $\beta = 2(1+x^2/k)^{-1}$ のガンマ分布に対応するので，その積分値は 1 となる。。パラメータ α，β のガンマ分布とは以下の密度関数である。

$$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\frac{x}{\beta})$$

ただし，$\alpha > 0$，$\beta > 0$，$x > 0$ とする。

(ii)(b) の証明: (ii)(a) で $Z = \sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma$，$U = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/\sigma^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$ とおく。このとき，(i)(d) から $Z = \sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$，(i)(f) から $U = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/\sigma^2 = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ がそれぞれ得られた。さらに，(i)(f) から $Z = \sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma$ と $U = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2/\sigma^2 = (n-1)S^2/\sigma^2$ は独立ということが分かった。よって，(ii)(a) を当てはめることができて，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/S \sim t(n-1)$ が導かれることになる。

以上で，ようやく,『基本統計学 (第 2 版)』の P.86 の定理 6.5 の証明が完了した。

参考文献

• 『確率統計演習 1 確率』(国沢清典編，1966，培風館)
• 『確率統計演習 2 統計』(国沢清典編，1966，培風館)
• R.V. Hogg and A.T. Craig, 1995, *Introduction to Mathematical Statistics* (5th ed.), Prentice Hall.
• H. Tanizaki, 2004, *Computational Methods in Statistics and Econometrics* (STATISTICS: textbooks and monographs, Vol.172), Mercel Dekker.