



Discussion Papers In Economics And Business

周波数領域における時系列間の因果性の変化の検証に関して

木下亮 大屋幸輔

Discussion Paper 14-09

Graduate School of Economics and
Osaka School of International Public Policy (OSIPP)
Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, JAPAN

周波数領域における時系列間の因果性の変化の検証に関して

木下亮 大屋幸輔

Discussion Paper 14-09

February 2014

Graduate School of Economics and
Osaka School of International Public Policy (OSIPP)
Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, JAPAN

周波数領域における時系列間の因果性の変化の検証に関して*

木下 亮[†] ・大屋 幸輔[‡]

概要

時系列間の因果性の検証には Granger による因果性検定など代表的な方法があるが、本稿では構造変化が因果性の大きさに、どのような変化をもたらしたかを検証する方法を提案する。Hosoya (1991), Geweke (1982) において定義された周波数領域上での因果性測度を利用し、構造変化の時点を既知とした上で、因果性の変化の程度を測り、有意な変化が生じているかどうかを検証するための Wald 検定統計量を提案した。この検定統計量では各周波数における因果性の変化を検出することが可能であり、さらに誤差修正モデルにおいても応用が可能である。検定統計量の有限標本における特性をモンテカルロ実験によって確認し、応用例として日米の株価指数を用いた実証分析を行った。

JEL 分類番号: C01, C19

キーワード: 因果性測度, 周波数領域, ECM モデル, 構造変化

*本論文の作成にあたって、2013 年度関西計量経済学研究会の参加者から貴重なコメントを頂いた。ここに記して謝意を表す。本稿に含まれる誤謬、主張の一切の責任は著者個人に帰属するものである。

[†]大阪大学経済学研究科: 〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-7

Email: kge003kr@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

[‡]大阪大学経済学研究科: 〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-7

Email: oya@econ.osaka-u.ac.jp

1 はじめに

標本期間の異なる統計的推測に際して、必ずしも同一のパラメータの推定値が得られるとは限らない。異なる推定結果を得た場合、モデルの特定化が異なった場合、モデルの構造は変化していることになる。一方で、モデルの構造の変化が変数間の因果性に、どの程度の変化をもたらすのかは明らかではない。本稿ではそのような構造変化が、時系列間の因果性をどのように変化させたのかを検証する方法を提案する。

時系列間の因果性の測度は Granger (1963,1969) によって一期先予測誤差の分散比という形で導入され、Geweke (1982) では Granger の因果性測度の単調変換を一期先予測誤差のスペクトル分解の公式を用いて分解することで、周波数領域での因果性測度を提案している。

Geweke (1982) の因果性測度は、定常な VAR モデル(ベクトル自己回帰モデル)を対象としており、VAR モデルによる表現が可能でない時系列モデルに対しては因果性測度は定義されていない。また VAR モデルの中でも特定の仮定を満たさない場合には周波数領域への分解が必ずしも成立していない。その後 Hosoya (1991) で、この問題を克服する因果性測度が新たに導入された。Geweke (1982) と同様に、Hosoya (1991) で定義された因果性測度は Granger 因果性測度の考え方を背景に持っており、確率変数 Y 固有のショックから確率変数 X への Granger 因果性測度に単調な変換を施すことで、 Y から X への因果性測度を定義している。この因果性測度では X のフィードバック効果が取り除かれている。更に、この因果性測度では Granger(1963,1969) や Geweke (1982) が対象としていた VAR モデル以外においても定義することが可能となっている。Geweke (1982) と Hosoya (1991) の因果性の測度は特定の仮定の下では一致するが、Hosoya (1991) の方がより一般的な定義となっている。

Yao and Hosoya (2000) では Hosoya (1991) を拡張し、非定常時系列間の因果性測度を定義し、特に誤差修正モデルにおける因果性測度の推定方法と Wald 検定統計量による検定法が提案されている。Breitung and Candelon (2006) では、Geweke (1982) と Hosoya (1991) の因果性測度に基づいて、因果性測度がゼロであることと同値な時系列モデルへの線形制約とそれに関する検定統計量を導出している。また Hosoya (2001) では、第三の確率変数が存在する場合の偏因果性測度を定義している。国友・山本 (1986) では、Akaike (1968) で導入された RPC(相対的パワー寄与率)を用いた因果性の検定を提案し、国内マクロ時系列を用いた実証分析を行っている。国友・山本 (1986) の検定方法は Geweke (1982) の因果性測度に対しても応用可能であり、本稿と密接に関係する研究である。

本稿では，Hosoya (1991) の因果性測度に基づき，Yao and Hosoya (2000) の方法を応用することで因果性測度に変化があったことを検出する為の Wald 検定統計量を提案し，モデルの構造変化の時点を既知とした上で，因果性測度の変化の漸近分布を導出している．続く以下第 2 節では，Geweke (1982) と Hosoya (1991) で導入された因果性測度と Yao and Hosoya (2000) で拡張された非定常時系列における因果性測度について概説を与える．第 3 節では，Yao and Hosoya (2000) で提案された因果性に対する Wald 検定統計量を例示した後，因果性の変化を検出する為の Wald 検定統計量の導出を行い，詳細な検定手続きを述べ，第 4 節において，導出した検定統計量の性質をモンテカルロ実験によって検討し，第 5 節では，日本と米国の株式指数間の因果性に関する応用例を示している．

2 因果性の測度

本節では，Geweke (1982) と Hosoya (1991) で導入された時系列間の因果性の測度について考察していく．Geweke (1982) と Hosoya (1991) では，確率ベクトル間の因果性測度を定義しているが，ここでは簡単化の為に 2 変数間の因果性測度を説明する．

2.1 定義

$X(t)$ と $Y(t)$ はそれぞれ定常な確率過程であり，それらを $Z(t) = [X(t) \ Y(t)]'$ とする．このとき $Z(t)$ の同時スペクトル密度関数は以下で与えられるものとする．

$$f(\lambda) = \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad -\pi < \lambda \leq \pi \quad (1)$$

スペクトル密度関数 $f(\lambda)$ に関しては

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \det(f(\lambda)) d\lambda > -\infty. \quad (2)$$

を満たしていると仮定する．このとき $f(\lambda)$ は正準分解によって

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \Lambda(e^{-i\lambda}) \Lambda(e^{-i\lambda})^* \quad (3)$$

と書くことができる．但し，上付き添え字の*は共役転置行列を表す．更に $Z(t)$ の一期先予測誤差，すなわち $Z(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ と $\{Y(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ に線形射影した残差の分散共分散行列を

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

と表す．ここで $\Lambda(0)\Lambda(0)^* = \Sigma$ である．

$Y(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^t, \{Y(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ に線形射影した残差を $Y_{0,-1}(t)$ と定義する．この $Y_{0,-1}(t)$ は時点 t において $X(t)$ と相関を持たないショックであり， $Y(t)$ 固有のショックとみなすことができる．また $Y_{0,-1}(t)$ はホワイトノイズとなっている．ここで $X(t)$ と $Y_{0,-1}(t)$ の同時スペクトル密度関数を以下のように定義する．

$$\tilde{f}(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11}(\lambda) & \tilde{f}_{12}(\lambda) \\ \tilde{f}_{21}(\lambda) & \tilde{f}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad -\pi < \lambda \leq \pi. \quad (5)$$

ここで $\tilde{f}_{11}(\lambda) = f_{11}(\lambda)$, $\tilde{f}_{21} = [-(\rho\sigma_1\sigma_2)/\sigma_1^2 \quad 1]\Lambda(0)\Lambda(e^{-i\lambda})f_{\cdot 1}(\lambda)$, $\tilde{f}_{22} = (\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_2^2)/(2\pi)$, ただし $f_{\cdot 1}(\lambda)$ は $f(\lambda)$ の一列目，すなわち $f_{\cdot 1}(\lambda) = [f_{11}(\lambda) \quad f_{21}(\lambda)]'$ である．このとき Hosoya (1991) で提案されている因果性測度は

$$M_{Y \rightarrow X} = \log(\sigma_{-1,\cdot}^2 / \tilde{\sigma}_1^2) \quad (6)$$

となる．ただし $\sigma_{-1,\cdot}^2$ は $X(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ へ線形射影した残差の分散であり， $\tilde{\sigma}_1^2$ は $\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ と $\{Y_{0,-1}(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ に線形射影した残差の分散である．(6) では， $Y(t)$ にのみ与えられたショック $Y_{0,-1}(t)$ の，過去の情報を用いることによる一期先予測の分散の対数値での減少を， $Y(t)$ から $X(t)$ への因果性測度と定義している． $Y_{0,-1}(t)$ から， $X(t)$ への Granger 因果性測度の単調変換を $Y(t)$ から $X(t)$ への因果性測度と読み換えていると言っても良い．この因果性測度は，定常時系列の一期先予測誤差の分散のスペクトル密度関数での分解の公式 $\det(\Sigma) = (1/2\pi) \exp\{(1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \log \det(f(\lambda)) d\lambda\}$ から

$$\sigma_{-1,\cdot}^2 = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(f_{11}(\lambda)) d\lambda \right\},$$

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(f_{11} - 2\pi \frac{\|\tilde{f}_{12}(\lambda)\|}{\tilde{f}_{22}(\lambda)} \right) d\lambda \right\}$$

となることを利用して，周波数分解することができる (詳細は Hosoya (1991) Lemma 2.4 参照)．周波数分解

された因果性測度は以下で与えられる．

$$M_{Y \rightarrow X}(\lambda) = \log \left(\frac{f_{11}(\lambda)}{f_{11} - 2\pi \| \tilde{f}_{12}(\lambda) \| / \tilde{f}_{22}(\lambda)} \right), \quad -\pi < \lambda \leq \pi \quad (7)$$

またこの分解の下では

$$M_{Y \rightarrow X} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} M_{Y \rightarrow X}(\lambda) d\lambda$$

が成立する． $f_{11} - 2\pi \| \tilde{f}_{12}(\lambda) \| / \tilde{f}_{22}(\lambda)$ は $X(t)$ を $\{Y(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ に射影した残差のスペクトル密度関数となっている．この因果性測度を求める為には，スペクトル密度関数 $f(\cdot)$ とスペクトル密度関数の正準分解 $\Lambda(\cdot)$ ，さらに $\tilde{f}(\cdot)$ を求める必要があるが，導出については次節で与える．一方，Geweke (1982) で定義された因果性測度は

$$F_{Y \rightarrow X} = \log(\sigma_{-1,\cdot}^2 / \sigma_1^2) \quad (8)$$

である． σ_1^2 は $X(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ と $\{Y(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ に線形射影した残差の分散であり，(4) における σ_1^2 の定義と同一である．この因果性測度も一期先予測誤差のスペクトル分解の公式によって周波数分解が可能である．具体的な定義は後述するが，この周波数分解された因果性測度を $f_{Y \rightarrow X}(\lambda)$ としておく．Geweke (1982) の因果性測度は Granger 因果性測度の単調変換の対数値であり，定常な VAR モデルを対象としているが，VAR モデルの中でも周波数分解が成立しない場合があることが知られている．すなわち Geweke (1982) の因果性測度では

$$F_{Y \rightarrow X} > \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{Y \rightarrow X}(\lambda) d\lambda \quad (9)$$

となる可能性がある．これに対し Hosoya (1991) における因果性測度は，特定のモデルを仮定することなく，スペクトル密度関数を用いて定義されており，より一般性のある測度となっており，(9) のような問題も生じていない．Hosoya (1991) では，Geweke (1982) では因果性測度が定義されていない例と，因果性測度の周波数分解が成立しない例があげられている．以降本稿では，Hosoya (1991) の因果性測度の下で議論を進める．

Hosoya (1991) では，これらの議論を確率ベクトルの因果性に一般化して，同時スペクトル密度関数 $f(\lambda)$ と一期先予測誤差の分散共分散行列 $\Sigma = (\Sigma_{ij})$, $(i, j = 1, 2)$ を持つ確率ベクトル $X(t)$ と $Y(t)$ 間の因果性測度を

$$M_{Y \rightarrow X} = \log \left(\det(\Sigma_{-1,\cdot}) / \det(\tilde{\Sigma}_{11}) \right) \quad (10)$$

として定義している．ただし Σ_{-1} は $X(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ へ射影した残差の分散共分散行列， $\tilde{\Sigma}_{11}$ は $X(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ と $\{Y_{0,-1}(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ へ射影した残差の分散共分散行列である．周波数分解された因果性測度は

$$M_{Y \rightarrow X}(\lambda) = \log \left(\frac{f_{11}(\lambda)}{f_{11} - 2\pi \tilde{f}_{12}(\lambda) \tilde{f}_{22}(\lambda)^{-1} \tilde{f}_{21}(\lambda)} \right), \quad -\pi < \lambda \leq \pi \quad (11)$$

として定義されている．ただし $\tilde{f}_{11}(\lambda) = f_{11}(\lambda)$ ， $\tilde{f}_{21} = [-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} \quad I] \Lambda(0) \Lambda(e^{-i\lambda}) f_{.1}(\lambda)$ ， $f_{22} = (\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})/(2\pi)$ ， $f_{.1}(\lambda) = [f_{11}(\lambda) \quad f_{21}(\lambda)]'$ である．また Hosoya (1991) では，因果性測度の他に相互効果測度と相互依存測度を定義している．

2.2 時系列モデルにおける因果性測度

Hosoya (1991) の因果性測度を計算するためには，スペクトル密度関数とその正準分解の計算が必要である．以下では時系列モデルにおけるスペクトル密度関数と正準分解の計算について説明を与える．

$Z(t) = [X(t) \quad Y(t)]'$ は以下で表される時系列とする．

$$A(L)Z(t) = B(L)\epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0, \Sigma) \quad (12)$$

L はラグオペレータであり，その多項式 $A(L)$ と $B(L)$ をそれぞれ $A(L) = I - A_1L - A_2L^2 - \dots - A_pL^p$ ， $B(L) = I + B_1L + B_2L^2 + \dots + B_qL^q$ とする．

まず $Z(t)$ が定常な時系列であるとき

$$Z(t) = A(L)^{-1}B(L)\epsilon(t) = A(L)^{-1}B(L)\Sigma^{1/2}u(t), \quad u(t) \sim N(0, I) \quad (13)$$

とする移動平均モデル (MA モデル) による表現が可能である．この $A(L)^{-1}B(L)\Sigma^{1/2}$ は正準分解となるので， $\Lambda(\cdot) = A(\cdot)^{-1}B(\cdot)\Sigma^{1/2}$ とすればよい．Geweke (1982) における因果性測度は

$$E(L) = A(L)^{-1}B(L)\Sigma^{1/2} = \begin{bmatrix} E_{11}(L) & E_{12}(L) \\ E_{21}(L) & E_{22}(L) \end{bmatrix}$$

とおくと

$$f_{Y \rightarrow X}(\lambda) = \log \left(\frac{\det(f_{11}(\lambda))}{(1/2\pi)\det(E_{11}(e^{-i\lambda})E_{11}(e^{-i\lambda})^*)} \right)$$

として定義される．Geweke (1982) では， $\det(A(L)^{-1}B(L)) = 0$ の根が単位円上にある場合に因果性測度が定義されていない．また， $X(t)$ が (13) 式上で反転可能な MA と反転不可能な MA の和となっている場合には，Geweke (1982) の因果性測度の周波数分解が必ずしも成立しない．つまり $F_{Y \rightarrow X}(\lambda) > \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda$ となる可能性がある．特定の仮定が満たされた場合には Geweke (1982) の因果性測度は Hosoya (1991) の因果性測度と一致する．

$Z(t)$ のスペクトル密度関数は

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} A(e^{-i\lambda})^{-1} B(e^{-i\lambda}) \Sigma B(e^{-i\lambda})^* A(e^{-i\lambda})^{-1*} \quad (14)$$

として計算することができる．また $X(t), Y_{0,-1}(t)$ のスペクトル密度関数 $\tilde{f}(\lambda)$ は

$$\tilde{f}(\lambda) = \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & ([-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} \ I]A(e^{-i\lambda})^{-1}B(e^{-i\lambda})f_{11}(\lambda))^* \\ [-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} \ I]A(e^{-i\lambda})^{-1}B(e^{-i\lambda})f_{11}(\lambda) & \frac{1}{2\pi}(\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}) \end{bmatrix}$$

として求められる．これらと (11) から Hosoya (1991) の因果性測度をもとめることができる．

2.3 非定常時系列間における因果性測度

非定常時系列においては，定常に変換された時系列でのスペクトル密度関数を用い，その上で因果性測度を考える．Yao and Hosoya (2000) では以下のように，非定常時系列における因果性測度を定義している．まず (11) 式の両辺から $A(L)$ の随伴行列を掛けることによって

$$\det(A(L))Z(t) = \det(A(L))A(L)^{-1}B(L)\epsilon(t) \quad (15)$$

と $Z(t)$ を変換する．Yao and Hosoya (2000) では根が全て単位円上か外にあると仮定した上で，右辺の MA 表現のラグ多項式から求めたスペクトル密度関数を使って因果性測度を定義することを提案している．つまり $\det(A(L))Z(t)$ のスペクトル密度関数は

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \det(A(e^{-i\lambda}))^2 A(e^{-i\lambda})^{-1} B(e^{-i\lambda}) \Sigma B(e^{-i\lambda})^* A(e^{-i\lambda})^{-1*} \quad (16)$$

であり，その正準分解は $\Lambda(e^{-i\lambda}) = \det(A(e^{-i\lambda}))A(e^{-i\lambda})^{-1}B(e^{-i\lambda})\Sigma^{1/2}$ となる．(11) 式から明らかなように，因果性測度は比率で定義されているため，スペクトル密度関数を定数倍しても因果性測度は不変である．

本稿では簡単化の為、以下の定義を用いる。 $A(L) = 0$ に関して、根が 1 となる数を q とし、 $Z(t)$ を

$$(1 - L)^q Z(t) = \tilde{A}(L)^{-1} B(L) \epsilon(t) \quad (17)$$

と変換する。但し $A(L) = (1 - L)^q \tilde{A}(L)$ である。このときスペクトル密度関数は

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \tilde{A}(e^{-i\lambda})^{-1} B(e^{-i\lambda}) \Sigma B(e^{-i\lambda})^* \tilde{A}(e^{-i\lambda})^{-1*}$$

となり、正準分解は $\Lambda(e^{-i\lambda}) = \tilde{A}(e^{-i\lambda})^{-1} B(e^{-i\lambda}) \Sigma^{1/2}$ と表すことができる。これらを用いて (5) に従い $\tilde{f}(\lambda)$ を求め、(7) に代入することで因果性測度を求めることができる。つまり、 $\Delta^q Z(t)$ 上での因果性測度を $Z(t)$ 上での因果性測度として定義するのである。(15) と (17) のどちらの変換を用いた場合でも因果性測度は同じである。

2.4 誤差修正モデルにおける因果性測度

本節では、Yao and Hosoya (2000), Breitung and Candelon (2006) と同様に、誤差修正モデルにおける因果性測度の計算を説明する。誤差修正モデルは $Z(t)$ を $p \times 1$ の確率過程、 r を共和分のランクとすると

$$\Delta Z(t) = \Pi Z(t-1) + \sum_{j=1}^{a-1} \Psi(j) \Delta Z(t-j) + \Phi P(t) + \epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0, \Omega)$$

と書くことができる。ここで Π は $p \times p$ の正方行列であるが、そのランクは $\text{rank}(\Pi) = r$ であり、 $p \times r$ の行列 α, β を用いて $\Pi = \alpha\beta'$ と表現できるものとする。 $P(t)$ は外生説明変数であり Φ はその係数行列である。また誤差修正モデルはラグオペレータ L を用いて

$$(I - (I + \alpha\beta')L - \sum_{j=1}^{a-1} \Psi(j)(L^j - L^{j+1}))Z(t) = \epsilon(t)$$

と書くことができる。 $Z(t)$ は非定常時系列であるから、 $\Delta Z(t)$ 上での因果性測度を考える。 $\Delta Z(t) = \phi(L)\epsilon(t)$ として MA 表現すると

$$\phi(L) = (1 - L)(I - (I + \alpha\beta')L - \sum_{j=1}^{a-1} \Psi(j)(L^j - L^{j+1}))^{-1}, \quad (18)$$

となる。スペクトル密度関数を

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \phi(e^{-i\lambda}) \Omega \phi(e^{-i\lambda})^*$$

とし、スペクトル密度関数の正準分解を $\Lambda(e^{-i\lambda}) = \phi(e^{-i\lambda})\Omega^{1/2}$ として因果性測度を計算すればよい。特に、差分をとった後の $\Delta Z(t)$ に関しては、変数間の長期的な関係が除去されているように見えるが、実際は、任意の $0 < \lambda < \pi$ において $\phi(e^{-i\lambda})$ は、 $\alpha\beta'$ を含む為、共和分ベクトル β は $\Delta Z(t)$ 上の因果性測度に影響を与えている。

周波数ゼロ，すなわち $L = 1$ において， $A(L) = I - (I + \alpha\beta')L - \sum_{j=1}^{a-1} \Psi(j)(L^j - L^{j+1})$ は特異となる為， $A(1)^{-1}$ が存在しないことには注意が必要である。このため，誤差修正モデルにおいて，周波数ゼロでの因果性測度は定義されないが，ゼロ近傍における因果性測度に長期因果性測度としての解釈を与えることはできる（詳しくは，Granger and Lin (1995) を見よ）。また，共和分ベクトルが存在しないとき，すなわち $\Pi = \alpha\beta' = 0$ のときには，誤差修正モデルにおける因果性測度は $\Delta Z(t)$ に対する定常時系列の因果性測度に帰着する。

3 構造変化と因果性の変化

本節では，時系列モデルにおいて構造変化があった場合の因果性の変化に対する検定統計量を導出する。特に，Yao and Hosoya (2000)，Breitung and Candelon (2006) と同様に，誤差修正モデルに限定して具体的な検定の手順を述べる。はじめに，Yao and Hosoya (2000) で提案された因果性測度がゼロであることに対する検定統計量について説明をあたえた後に，因果性測度の変化に関する検定統計量に関して考察する。

3.1 因果性測度がゼロであることに対する検定

Yao and Hosoya (2000) では，最尤推定量の漸近正規性を利用した Wald 検定統計量によって，因果性の検定を行うことを提案している。Yao and Hosoya (2000) で提案された検定の手順は，(i) モデルのパラメータを最尤法による推定，(ii) 推定されたパラメータを使ったスペクトル密度関数の推定と因果性測度の推定，(iii) 最尤推定量の漸近分布と推定された因果性測度から，デルタ法により Wald 検定統計量を求める，とい

う 3 ステップから構成されている。まず (i) については次のとおりである。誤差修正モデルは

$$\begin{aligned}\Delta Z(t) &= \Pi Z(t-1) + \sum_{j=1}^{a-1} \Psi(j) \Delta Z(t-j) + \Phi P(t) + \epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0, \Omega) \\ &= \Pi Z(t-1) + \Psi' W(t) + \Phi P(t) + \epsilon(t)\end{aligned}$$

と書くことができる。ただし $\Pi = \alpha\beta'$ であり、共和分のランクが r のとき、 α と β は $p \times r$ の行列で、 $\text{rank}(\Pi) = p-r$ となる。また $\Psi = [\Psi(1), \Psi(2), \dots, \Psi(a-1)]'$ であり、 $W(t) = [\Delta Z(t-1)', \Delta Z(t-2)', \dots, \Delta Z(t-a+1)]'$ である。以降 $\theta = \{\alpha, \Psi, \Phi, \Omega\}$ とし、 β とそれ以外のパラメータを分けて考える。

この誤差修正モデルの対数尤度関数は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}l(\alpha, \beta, \Psi, \Phi, \Omega|Z) &= -\frac{T}{2} (p \log(2\pi) + \det(\Omega)) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\Delta Z(t) - \mu(t))' \Omega^{-1} (\Delta Z(t) - \mu(t)), \\ \mu(t) &= \alpha\beta' Z(t-1) + \sum_{j=1}^{a-1} \Psi(j) \Delta Z(t-j) + \Phi P(t).\end{aligned}$$

次に M_{ij} , $i, j = 0, 1, 2$ と S_{ij} , $(i, j = 0, 1)$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}M_{00} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta Z(t) \Delta Z(t)', \quad M_{01} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta Z(t) Z(t-1)', \\ M_{02} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta Z(t) W(t)', \quad M_{11} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z(t-1) Z(t-1)', \\ M_{12} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z(t-1) W(t)', \quad M_{22} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T W(t) W(t)', \\ S_{ij} &= M_{ij} - M_{i2} M_{22}^{-1} M_{2j}, \quad i, j = 0, 1.\end{aligned}$$

このとき誤差修正モデルに関する対数尤度関数は、共和分ベクトル β に関して集約され $|\hat{\beta}'(S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}) \hat{\beta}| / |\hat{\beta}' S_{11} \hat{\beta}|$ と表すことができ、 β の最尤推定量は固有値問題

$$|\gamma S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}| = 0$$

を解いて求めることができる (Johansen (1995))。固有値 γ_i を大きい順に並べ、対応する固有ベクトルを v_i とすると、 β の最尤推定量は $\hat{\beta} = [v_1, v_2, \dots, v_r]$ としてもとめることができる。残りのパラメータについても、 $\hat{\alpha} = S_{01} \hat{\beta} (\hat{\beta}' S_{11} \hat{\beta})^{-1}$, $\hat{\Psi} = M_{02} M_{22} - \hat{\alpha} \hat{\beta}' M_{12} M_{22}^{-1}$, $\hat{\Omega} = S_{00} - \hat{\alpha} (\hat{\beta}' S_{11} \hat{\beta}) \hat{\alpha}$ として推定することができる。共和分ベクトルが存在しない ($\Pi = \alpha\beta' = 0$) ときには、モデルの AR 部分の係数の推定量 $\hat{\Psi}$ は通常の VAR モデルにおける OLS 推定量となる。

最尤推定量 $\hat{\beta}$, $\hat{\theta}$ はどちらも一致推定量であるが, 前者の収束のスピードは T であり, 後者の \sqrt{T} よりも早いものとなっている. $\hat{\theta}$ に関しては以下の漸近正規性が成立することが知られている.

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, V(\theta, \beta)), \quad (19)$$

$$V(\theta, \beta) = \begin{bmatrix} \Omega \otimes Q^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2D^+(\Omega \otimes \Omega)D^{+'} \end{bmatrix} \quad (20)$$

ただし $Q = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \sum_{i=1}^T S(t)S(t)'$, $S(t) = \text{vec}(\beta'Z(t-1), \Delta Z(t-1), \dots, \Delta Z(t-a+1), P(t))$, D^+ は重複行列 (Duplication matrix) の一般化逆行列である (Duplication matrix の定義については Magnus and Neudecker (1988) を見よ). $\Omega \otimes Q^{-1}$ は $\{\hat{\alpha}, \hat{\Psi}, \hat{\Phi}\}$ の漸近分散共分散行列であり, $2D^+(\Omega \otimes \Omega)D^{+'}$ は $\hat{\Omega}$ の漸近分散共分散行列である. 漸近分散に含まれるパラメータを一致推定量で置き換えることで得られる漸近分散共分散行列の推定量は,

$$V(\hat{\theta}, \hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \hat{\Omega} \otimes \hat{Q}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2D^+(\hat{\Omega} \otimes \hat{\Omega})D^{+'} \end{bmatrix} \quad (21)$$

となる. ただし, $\hat{Q} = 1/T \sum_{i=1}^T \hat{S}(t)\hat{S}(t)'$ である.

次に (ii) 推定されたパラメータを所与として, スペクトル密度関数を推定し, 因果性測度をもとめる. スペクトル密度関数はパラメータの関数であることから, 因果性測度 $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta)$ はパラメータの関数である. 従って, 因果性測度の推定量は $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}, \hat{\beta})$ で与えられる. MA 表現のラグ多項式は, (18) より

$$\hat{\phi}(L) = (1 - L)\hat{A}(L)^{-1}$$

となる. ただし $\hat{A}(L) = I - (I + \hat{\alpha}\hat{\beta}')L - \sum_{j=1}^{a-1} \hat{\Psi}(j)(L^j - L^{j+1})$ である. スペクトル密度関数は

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \hat{\phi}(e^{-i\lambda}) \hat{\Omega} \hat{\phi}(e^{-i\lambda})^*, \quad 0 < \lambda \leq \pi$$

として推定する. また, スペクトル密度関数の正準分解は $\hat{\Lambda}(e^{-i\lambda}) = \hat{\phi}(e^{-i\lambda})\hat{\Omega}^{1/2}$ である. さらに

$$\hat{f}(\lambda) = \begin{bmatrix} \hat{f}_{11}(\lambda) & ([-\hat{\Omega}_{21}\hat{\Omega}_{11}^{-1} \ I] \hat{\phi}(e^{-i\lambda})^{-1} \hat{f}_{\cdot 1}(\lambda))^* \\ [-\hat{\Omega}_{21}\hat{\Omega}_{11}^{-1} \ I] \hat{\phi}(e^{-i\lambda})^{-1} \hat{f}_{\cdot 1}(\lambda) & \hat{\Omega}_{22} - \hat{\Omega}_{12}\hat{\Omega}_{11}^{-1}\hat{\Omega}_{21} \end{bmatrix}$$

として (11) に推定量を代入することで, 因果性測度の推定量 $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}, \hat{\beta})$ が求められる.

最後に (iii) 最尤推定量の漸近分布と推定された因果性測度からデルタ法により Wald 検定統計量を求める。
デルタ法により

$$\sqrt{T} \left(M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}, \hat{\beta}) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta) \right) \xrightarrow{d} N(0, H(\theta, \beta))$$

となる。ただし $H(\theta, \beta) = (\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta) / \partial \theta') V(\theta, \beta) (\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta) / \partial \theta)$ である。

$H(\theta, \beta)$ に含まれる未知パラメータ θ, β は一致推定量で置き換えられ、以下で定義される $W(\lambda)$ は漸近的に自由度 1 の χ^2 分布に収束することが示される。

$$W(\lambda) = T \left(M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}, \hat{\beta}) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta) \right)^2 / H(\hat{\theta}, \hat{\beta})$$

このことを利用して、Wald 検定統計量は以下のように与えられる。例えば、複数の異なる周波数における因果性がゼロであることに関する同時検定に関しては、特定の周波数 λ_1, λ_2 において、次の帰無仮説と対立仮説を考えることになる。

$$H_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda_1; \theta, \beta) = 0, M_{Y \rightarrow X}(\lambda_2; \theta, \beta) = 0,$$

$$H_1 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda_1; \theta, \beta), M_{Y \rightarrow X}(\lambda_2; \theta, \beta) \text{ のいずれか, またはどちらもゼロではない.}$$

この仮説を検定するには、因果性測度を並べたベクトル

$$M(\theta, \beta) = \begin{bmatrix} M_{Y \rightarrow X}(\lambda_1; \theta, \beta) \\ M_{Y \rightarrow X}(\lambda_2; \theta, \beta) \end{bmatrix}$$

に対して

$$M(\hat{\theta}, \hat{\beta}) - M(\theta, \beta) \approx N \left(0, \frac{1}{T} \frac{\partial M(\theta, \beta)}{\partial \theta'} V(\theta, \beta) \frac{\partial M(\theta, \beta)}{\partial \theta} \right)$$

が成り立つことから、Wald 検定統計量は以下のように与えられ、その漸近分布は自由度 2 の χ^2 分布となる。

$$W(\lambda) = T M(\hat{\theta}, \hat{\beta})' H(\hat{\theta}, \hat{\beta})^{-1} M(\hat{\theta}, \hat{\beta}).$$

また、微分係数ベクトル $\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}, \hat{\beta}) / \partial \theta$ は (11) がパラメータの複雑な関数となっているため、解析的に求めることが困難であり、Yao and Hosoya (2000) では数値微分が利用されている。すなわち h を十分小さい値として

$$\frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}, \hat{\beta})}{\partial \theta} \approx \frac{M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta} + h, \hat{\beta}) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta} - h, \hat{\beta})}{2h}$$

として微分係数を近似している。

3.2 因果性測度の変化の検定

ここでは, Yao and Hosoya (2000) で提案された検定統計量を基に, 因果性測度が変化したことを検出する為の検定統計量を導出する. まず, 誤差修正モデルにおいて c を定数とし, $T_1 = [cT]$ においてパラメータに変化があったと仮定する (記号 $[x]$ は, 実数 x に対して x の整数部分を表す). $\theta_k = \{\alpha_k, \Psi_k(1), \Psi_k(2), \dots, \Psi_k(a-1), \Phi_k, \Omega_k\}$, $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ とすると, 構造変化がある場合の誤差修正モデルは

$$\Delta Z(t) = \alpha_k \beta_k' Z(t-1) + \sum_{j=1}^{a_k-1} \Psi_k(j) \Delta Z(t-j) + \Phi_k P(t) + \epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0, \Omega_k), \quad (22)$$

ただし $t < T_1$ のとき $k = 1$, $T_1 \leq t$ のときは $k = 2$ とする.

このとき構造変化は, パラメータの変化によってとらえられているが, 因果性がどのように変化したかは必ずしも明らかではない. よって以下では, モデルの構造変化が時系列間の因果性にも変化を与えるものであるかどうかを調べる為の統計的検定法を提案する. Yao and Hosoya (2000) と同様に検定の手順は (i) モデルのパラメータ推定, (ii) スペクトル密度関数を推定し, 因果性測度を推定, (iii) デルタ法による Wald 検定統計量の導出, という 3 ステップに分けて行う.

まず (i) モデルのパラメータの最尤法による推定について述べる. 対数尤度関数は c を所与として

$$\begin{aligned} l(\beta_1, \beta_2, \theta|Z) &= -\frac{T}{2} p \log(2\pi) + l_1(\beta_1, \theta_1|Z) + l_2(\beta_2, \theta_2|Z), \\ l_1(\beta_1, \theta_1|Z) &= -\frac{cT}{2} \det(\Omega_1) - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T_1} (\Delta Z(t) - \mu_1(t))' \Omega_1^{-1} (\Delta Z(t) - \mu_1(t)), \\ l_2(\beta_2, \theta_2|Z) &= -\frac{T-cT}{2} \det(\Omega_2) - \frac{1}{2} \sum_{t=T_1+1}^T (\Delta Z(t) - \mu_2(t))' \Omega_2^{-1} (\Delta Z(t) - \mu_2(t)), \\ \mu_k(t) &= \alpha_k \beta_k' Z(t-1) + \sum_{j=1}^{a_k-1} \Psi_k(j) \Delta Z(t-j) + \Phi_k P(t), \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

となる. 尤度関数は $\{\beta_1, \theta_1\}$ の関数である $l_1(\beta_1, \theta_1|Z)$ と $\{\beta_2, \theta_2\}$ の関数である $l_2(\beta_2, \theta_2|Z)$ に分離することができることから, 以下の最大化問題を解くことで, 最尤推定量を得ることができる.

$$\max_{\beta_1, \beta_2, \theta} l(\beta_1, \beta_2, \theta|Z) = \max_{\beta_1, \theta_1} l_1(\beta_1, \theta_1|Z) + \max_{\beta_2, \theta_2} l_2(\beta_2, \theta_2|Z)$$

この尤度関数の最大化は, 前節と同様の固有値問題に帰着する.

(ii) モデルのパラメータ推定量を用いたスペクトル密度関数の推定, そして因果性測度を推定することに關しても, 構造変化前と後のそれぞれで, 前節と同様に因果性測度 $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1)$, $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2)$ を

計算し，因果性測度の推定量とする．

最後に (iii) 最尤推定量の漸近分布と推定された因果性測度からのデルタ法による Wald 検定統計量の計算について説明する．最尤推定量 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ は，ともに一致推定量であり，その収束のスピードは T である．従ってここでは，推定量 $\hat{\theta} = [\hat{\theta}'_1, \hat{\theta}'_2]'$ に関してのみ考慮すれば良い．対数尤度関数に関して， θ についての一階の条件を真のパラメータ周りでテーラー展開すると

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1(\beta_1, \theta_1 | Z)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial l_2(\beta_2, \theta_2 | Z)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l_1(\hat{\beta}_1, \hat{\theta}_1 | Z)}{\partial \theta_1 \partial \theta'_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 l_2(\hat{\beta}_2, \hat{\theta}_2 | Z)}{\partial \theta_2 \partial \theta'_2} \end{bmatrix} \sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 - \theta_1 \\ \hat{\theta}_2 - \theta_2 \end{bmatrix} + o_p(1)$$

となる．上式では $\partial^2 l(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\theta} | Z) / \partial \theta_1 \partial \theta_2 = 0$ となっており，フィッシャー情報行列の非対角要素は 0，対角要素は

$$\begin{aligned} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 l_1(\hat{\beta}_1, \hat{\theta}_1 | Z)}{\partial \theta_1 \partial \theta'_1} &= cV(\theta_1, \beta_1)^{-1}, \\ \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 l_2(\hat{\beta}_2, \hat{\theta}_2 | Z)}{\partial \theta_2 \partial \theta'_2} &= (1-c)V(\theta_2, \beta_2)^{-1} \end{aligned}$$

となることから

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N \left(0, \begin{bmatrix} \frac{1}{c}V(\theta_1; \beta_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-c}V(\theta_2; \beta_2) \end{bmatrix} \right)$$

を得る． $\hat{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_2$ は漸近的に独立であるから，その連続関数である $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1)$ と $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2)$ も独立である．従って， $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2)$ の漸近分布は

$$M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2) \stackrel{a}{\sim} N \left(M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1, \beta_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2, \beta_2), \mathcal{V}(\theta, \beta_1, \beta_2) \right)$$

で与えられる．ただし，

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\theta, \beta_1, \beta_2) &= \frac{1}{cT} \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1, \beta_1)}{\partial \theta'_1} V(\theta_1, \beta_1) \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1, \beta_1)}{\partial \theta_1} \\ &\quad + \frac{1}{(1-c)T} \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2, \beta_2)}{\partial \theta'_2} V(\theta_2, \beta_2) \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2, \beta_2)}{\partial \theta_2}. \end{aligned}$$

帰無仮説 $H_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) = M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2)$ に対して，Wald 検定統計量は $\mathcal{V}(\theta, \beta_1, \beta_2)$ の未知パラメータ θ, β_1, β_2 を推定量で置き換えることによって以下で与えられ，漸近的に自由度 1 の χ^2 分布に従う．

$$W(\lambda) = (M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2))^2 / \mathcal{V}(\hat{\theta}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \quad (23)$$

複数の周波数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ において因果性の変化がないという帰無仮説に対しては,

$$D_1(\hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) = \begin{bmatrix} M_{Y \rightarrow X}(\lambda_1; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) \\ M_{Y \rightarrow X}(\lambda_2; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) \\ \vdots \\ M_{Y \rightarrow X}(\lambda_m; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) \end{bmatrix}, \quad D_2(\hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2) = \begin{bmatrix} M_{Y \rightarrow X}(\lambda_1; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2) \\ M_{Y \rightarrow X}(\lambda_2; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2) \\ \vdots \\ M_{Y \rightarrow X}(\lambda_m; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

に対して, $D(\hat{\theta}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = D_1(\hat{\theta}_1; \hat{\beta}_1) - D_2(\hat{\theta}_2; \hat{\beta}_2)$ を定義し, Wald 検定統計量

$$W(\lambda) = D(\hat{\theta}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)' \mathcal{V}_2(\hat{\theta}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^{-1} D(\hat{\theta}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \quad (24)$$

を得る. ただし

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2(\hat{\theta}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) &= \frac{1}{T_1} \frac{\partial D_1(\hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1)}{\partial \theta_1'} V(\hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) \frac{\partial D_1(\hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1)}{\partial \theta_1} \\ &\quad + \frac{1}{T - T_1} \frac{\partial D_2(\hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2)}{\partial \theta_2'} V(\hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2) \frac{\partial D_2(\hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2)}{\partial \theta_2} \end{aligned}$$

である. この検定統計量 W は帰無仮説の下で, 漸近的に自由度 m の χ^2 分布に従う.

本節で与えられている検定統計量は, 収束のスピードが \sqrt{T} である推定量の分布に基づいて構成されており, T のスピードで収束する共和分ベクトルの推定量 $\hat{\beta}$ の分布の影響は考慮されていない. また検定統計量は漸近的には χ^2 分布に従うが, $D(\hat{\theta}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ はパラメータの非線形関数であり, 真のパラメータ周りでの線形近似の精度が良くない場合には有限標本では検定のサイズの歪みや検出力に対して影響を与える可能性がある. 次節では, その有限標本特性についてモンテカルロ実験を用いて検証する.

4 モンテカルロ実験

本節では, モンテカルロ実験による検定統計量の有限標本特性を述べる. 本稿における数値計算は全て行列言語 Ox 6 (Doornik (2006)) を用いている. まず, 定常 VAR モデルに対する因果性測度の変化に対する実験の結果を述べる. モンテカルロ実験は以下の設定の下で行った.

$$\begin{aligned} X(t) &= \rho_1 Y(t-1) + u_1(t), \\ Y(t) &= \rho_2 Y(t-1) + u_2(t). \end{aligned} \quad (25)$$

但し, $u(t) \sim N(0, I)$ である. 標本サイズは $T = \{200, 400\}$, $T_1 = T/2$ であり, 試行回数は 1000 回である. また, 検定の名目サイズは 5% とする.

検定統計量のサイズは, モデルのパラメータに構造変化がない場合, すなわち, 全ての t に対して $\rho_1 = 0.3$ として実験を行って計算した. また, 検出力に関しては

$$\rho_1 = \begin{cases} 0.3 & \text{if } t \leq T_1 \\ 0.5 & \text{if } t > T_1 \end{cases}$$

として分析した. 以下, ρ_2 を複数の値を試すことで, モデルのパラメータと因果性測度との関係を確認しながら, 検定統計量の性質を調査する.

図 1 は, 構造変化がある場合において, $\rho_2 = 0.3$ とした場合の真の因果性測度と実験 1000 回において推定された因果性測度の算術平均を表している. $X(t)$ は低周波のところではスペクトル密度が大きい $Y(t)$ と全ての周波数でスペクトル密度が一定であるホワイトノイズ $u_1(t)$ で構成される. $X(t)$ の低周波成分での $Y(t)$ による予測可能な割合が大きい為, 低周波部分における $Y(t)$ から $X(t)$ への因果性測度は, 他の周波数と比べて大きくなっている. 実験の結果から, 有限標本において因果性測度の推定量は多少の上方バイアスはあるが不偏推定量に近いものとなっていた. 図 2 は構造変化前と変化後の因果性測度の差, すなわち

$$M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2)$$

の真の値と推定された差の算術平均を表している. 図 3 は, 検定統計量のサイズと検出力を周波数に対してプロットしたものである. 実験の結果から, 実質サイズは 3% 付近であり, 名目サイズの 5% を下回った. 検出力については, 周波数 1 から 1.5 の間で大きくなっており, 最も因果性測度の大きい周波数 0 付近の検出力を上回った. これは, 低周波部分における因果性測度の推定量の分散が大きいことが原因であると考えられる.

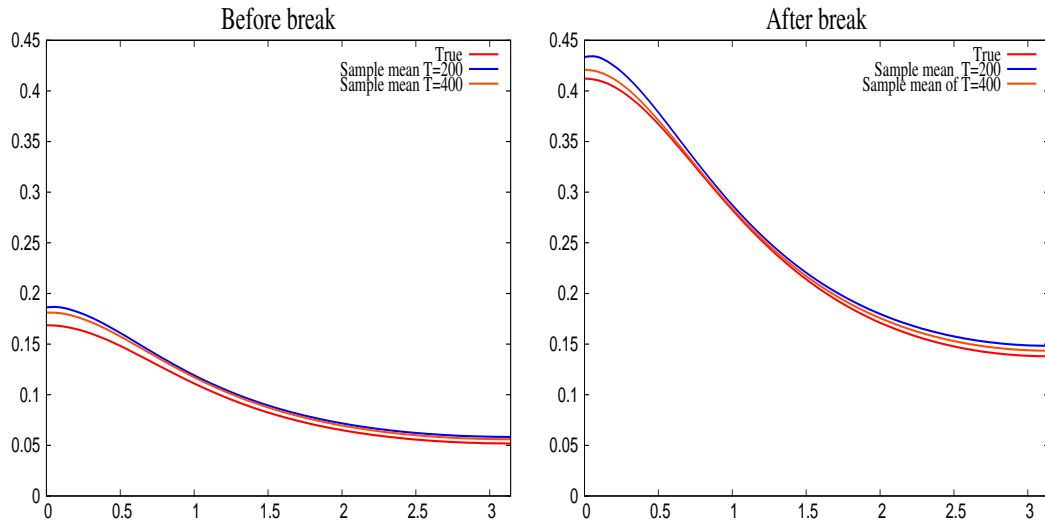


図 1: 真の因果性測度と実験における推定値の算術平均

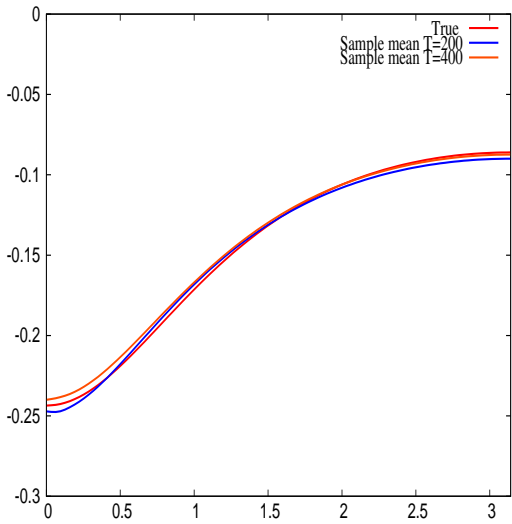


図 2: 真の因果性測度の差と実験における推定値の算術平均

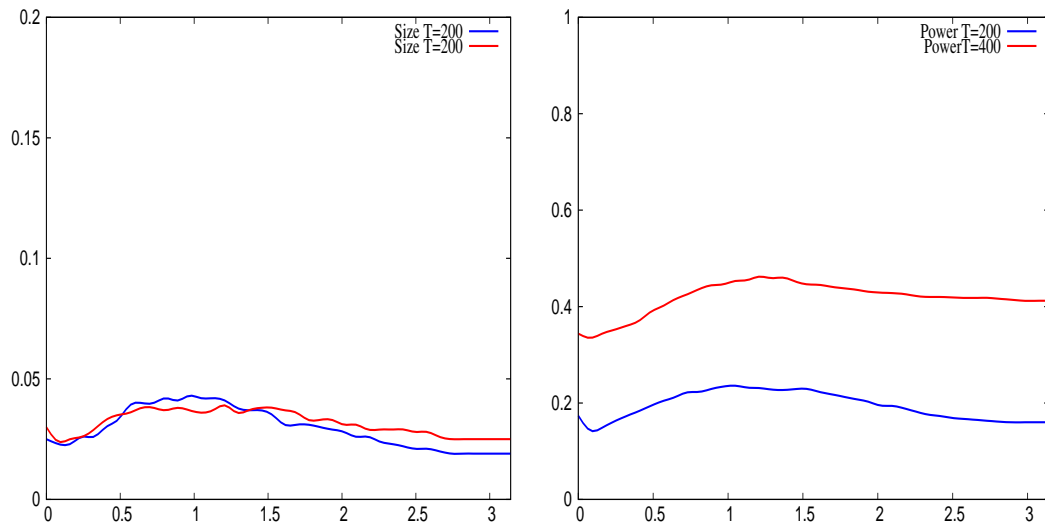


図 3: 検定統計量の実質サイズと検出力

次に, (25) において, $\rho_2 = -0.3$ とした場合の結果を述べる. 図 4 は, 真の因果性測度と推定された因果性測度の算術平均を表しており, 図 5 は因果性測度の差を, 図 6 は, 検定統計量のサイズと検出力を表したものである. この例では, $Y(t)$ は高周波部分でスペクトル密度が大きい為, 因果性測度も同様に高周波部分で大きくなっている. $\rho_2 = 0.3$ の場合と同様に実質サイズは 3 % 付近で, 下方バイアスが生じている. 検出力については, 周波数 π 付近の高周波部分で最も因果測度の差が大きいにも関わらず, 周波数 2 から 2.5 の間で検出力が最も大きかった.

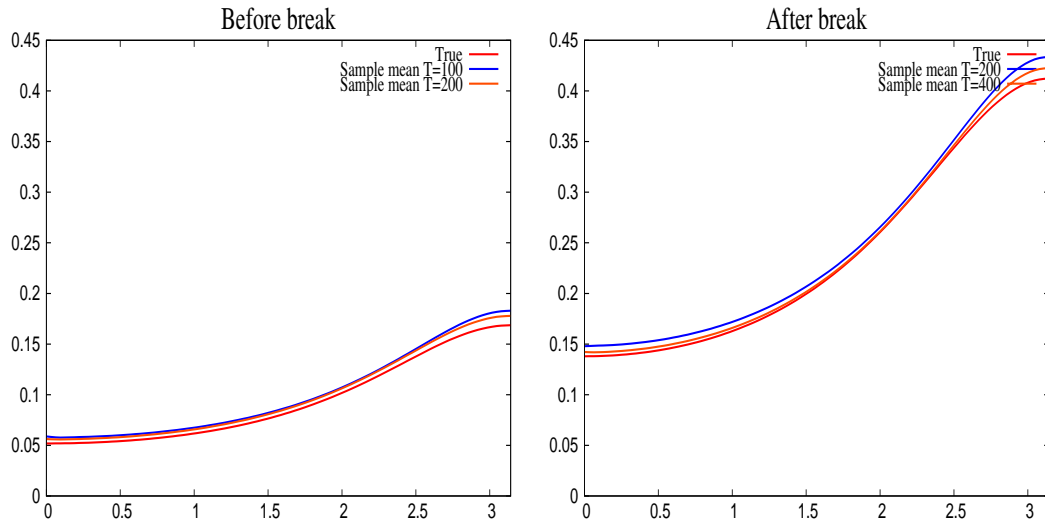


図 4: 真の因果性測度と実験における推定値の算術平均

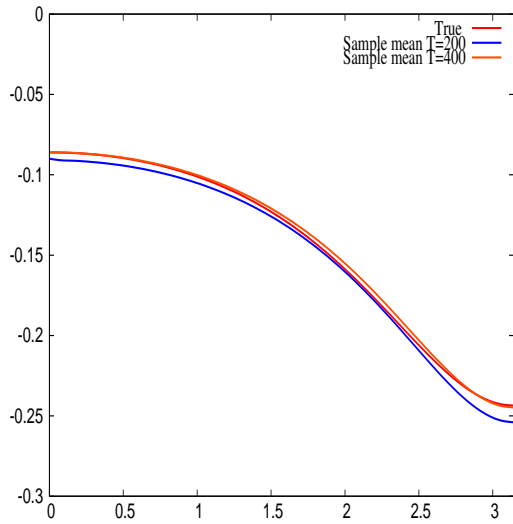


図 5: 真の因果性測度の差と実験における推定値の算術平均

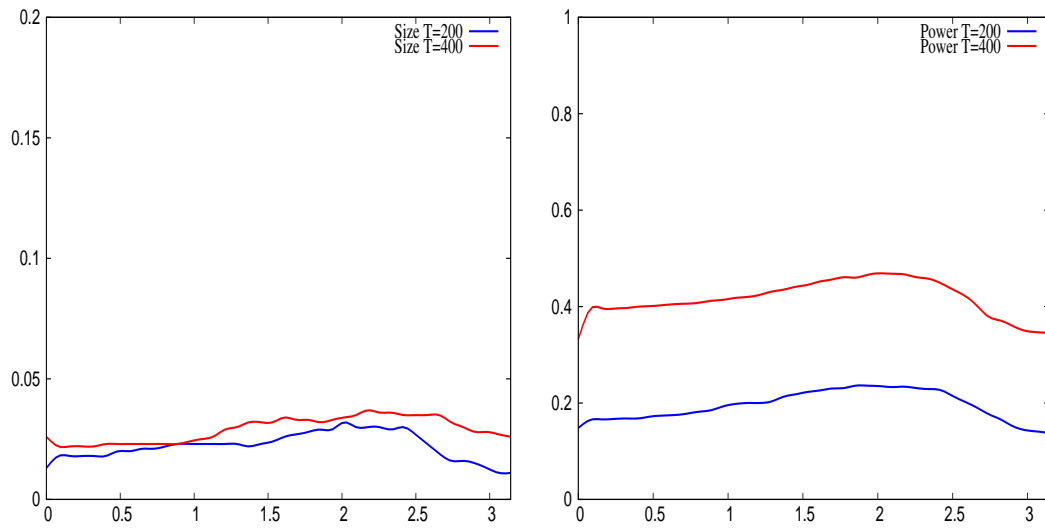


図 6: 検定統計量の実質サイズと検出力

最後に、誤差修正モデルにおける検定統計量の有限標本特性について述べる。実験は以下の設定の下で行った。

$$\Delta X(t) = (a - 1)(X(t - 1) - bY(t - 1)) + \epsilon_1(t),$$

$$\Delta Y(t) = \epsilon_2(t).$$

但し、

$$\epsilon(t) \sim N\left(0, \begin{bmatrix} b^2 + 2v\sigma + \sigma^2 & b + v\sigma \\ b + v\sigma & \sigma^2 \end{bmatrix}\right),$$

$(a, v, \sigma) = (0.5, -0.5, 0.5)$ である。構造変化がない場合 $b = 2.5$ とし、構造変化がある場合は

$$b = \begin{cases} 2.5 & \text{if } t \leq T_1 \\ 5 & \text{if } t > T_1 \end{cases}$$

とした。これは、Quintos (1998) におけるものと同様の設定である。この実験においては、 $T = 200$ とする。図 7 では、真の因果性測度と実験における推定値の算術平均を表し、図 8 は因果性測度の構造変化前と変化後の差を表している。定常 VAR モデルの場合と同様に、因果性測度の推定量は非定常時系列である誤差修正

モデルにおいても，十分に不偏推定量に近いものとなっていた．また，図9は

$$b = \begin{cases} 2.5 & \text{if } t \leq T_1 \\ b_2 & \text{if } t > T_1, \end{cases}$$

$b_2 \in \{3, 3.5, 4, 4.5, 5\}$ とした場合の検定統計量の検出力と $b_2 = 2.5$ として計算した実質サイズを表している．実質サイズは全ての周波数において3%付近であり，名目サイズである5%を下回った．また，周波数0付近の低周波部分でサイズが小さいにも関わらず，検出力が大きい結果が示された．

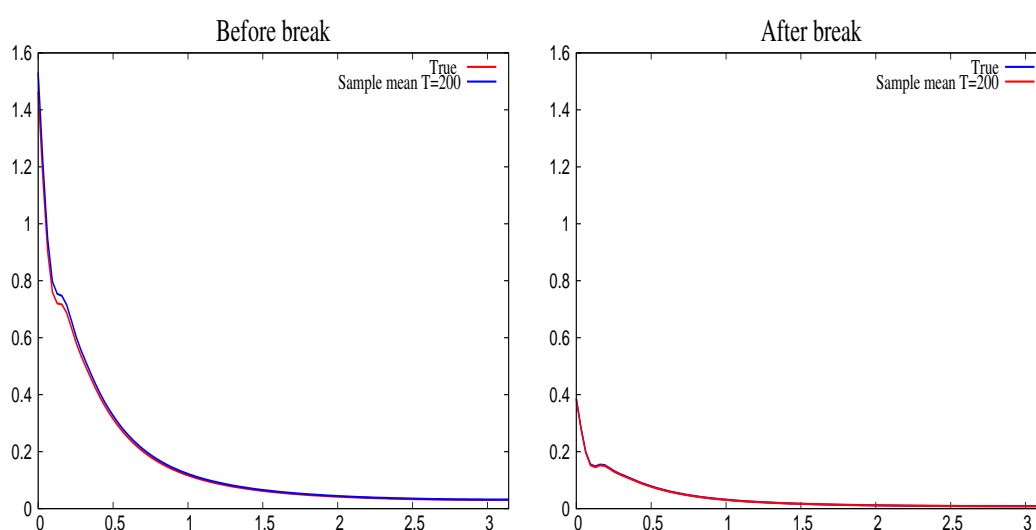


図7: 真の因果性測度と実験における推定値の算術平均

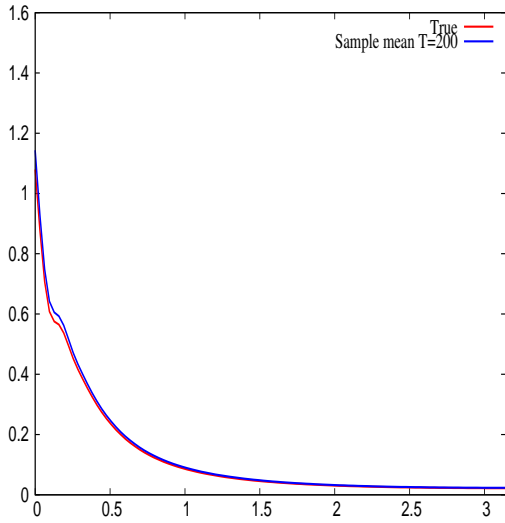


図 8: 真の因果性測度と実験における推定値の算術平均

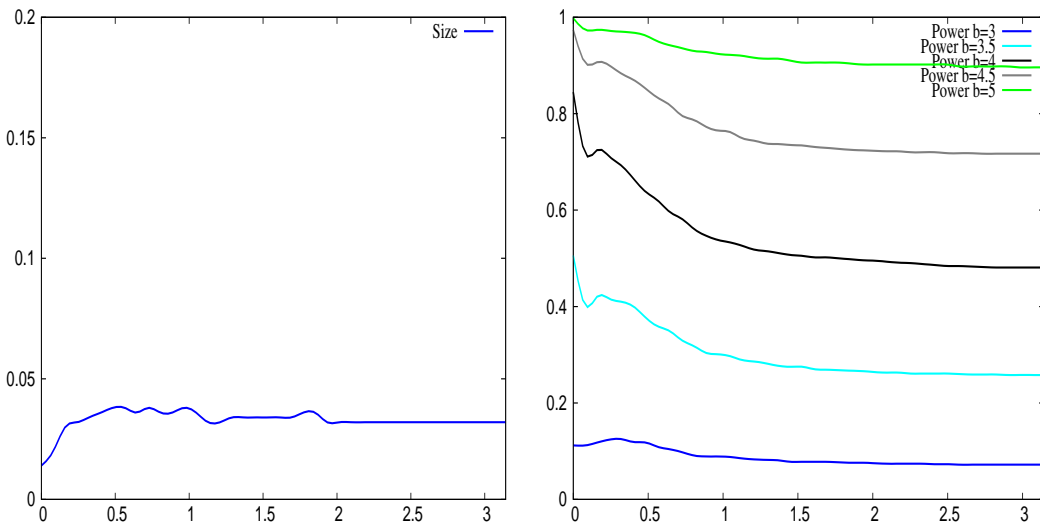


図 9: 検定統計量の実質サイズと検出力

5 実証例

本節では、実証分析の例を紹介する。実証例で用いたデータは、東証株価指数 (T O P I X) とスタンダード & プアーズ 500 種指数 (S & P 500) の日次データであり、共に対数値を用いた。本研究で用いたデータは全て日経 NEEDS-Financial Quest から取得した。データ期間は 1999 年 1 月 4 日から 2012 年 12 月 30 日であり、構造変化点は、リーマンショックの 9 月 15 日とする。Bruneau and Jondeau (1999) の方法を用いて、HQ (Hannan and Quinn (1979)) 情報量基準を用いてラグ数の選択を行った後に、トレース検定統計量 (Johansen (1995)) を用いて、共和分のランクを決定した。その結果、構造変化前では、共和分ランク 1、ラグ数 3 が選択され、構造変化後では共和分関係は検出されず、ラグ数は 4 が選択された。表 1 は誤差修正モデルの推定結果を表している。モデルの推定結果に基づき、S & P 5 0 0 から T O P I X への因果性測度の推定を行った結果が図 1 0 である。また、ここでは記載していないが T O P I X から S & P 5 0 0 への因果性は検出されなかった。また図 1 1 は、リーマンショック以前と以降それぞれにおける因果性測度が 0 であることに対する Wald 検定統計量を表している。これらの検定統計量は、各周波数に対して個別に計算したものであり、漸近的に自由度 1 の χ^2 分布に従う。また、図 1 2 はリーマンショック以前と以降での因果性測度の差の推定値であり、図 1 3 は因果性測度に変化があったことに対する Wald 検定統計量を表している。この検定統計量も同じく漸近的に自由度 1 の χ^2 分布に従う。図 1 1 から明らかなように、リーマンショック以前と以降のどちらにおいても、ほとんど全ての周波数で因果性は有意に検出されており、特に低周波の部分で因果性が強いことが分かる。因果性測度の変化を見ると、周波数 0.1 から 0.5 の間、周期 12 営業日から 62 営業日程度の波において因果性の変化が強く検出されている。これは、日本市場で活動する投資家がリーマンショック以降、2 週間から 12 週間程度の間隔で米国市場の動向をそれまで以上に意識して意思決定を行っている可能性を示唆している。

表 1: 誤差修正モデルのパラメータの推定値

1999/1/4 ~ 2008/9/15		$\Delta X(t)$: TOPIX, $\Delta Y(t)$: S&P500					
α	β						
-0.00066	10.31365						
0.00049	-15.09482						
Ψ							
	$\Delta X(t-1)$	$\Delta Y(t-1)$	$\Delta X(t-2)$	$\Delta Y(t-2)$	定数項		
$\Delta X(t)$	-0.02652	0.44295	-0.01080	0.06177	-0.02215		
$\Delta Y(t)$	-0.02570	-0.04164	0.00348	-0.01854	0.01643		
Ω							
$\Delta X(t)$	0.00013	0.00002					
$\Delta Y(t)$	0.00002	0.00012					
2008/9/16 ~ 2012/12/30							
α	β						
0.00000	0.00000						
0.00000	0.00000						
Ψ							
	$\Delta X(t-1)$	$\Delta Y(t-1)$	$\Delta X(t-2)$	$\Delta Y(t-2)$	$\Delta X(t-3)$	$\Delta Y(t-3)$	定数項
$\Delta X(t)$	-0.14215	0.57783	-0.06924	0.16606	-0.02937	0.07401	-0.00017
$\Delta Y(t)$	0.00114	-0.11479	-0.07252	-0.05336	0.01295	0.05420	0.00035
Ω							
$\Delta X(t)$	0.00017	0.00004					
$\Delta Y(t)$	0.00004	0.00023					

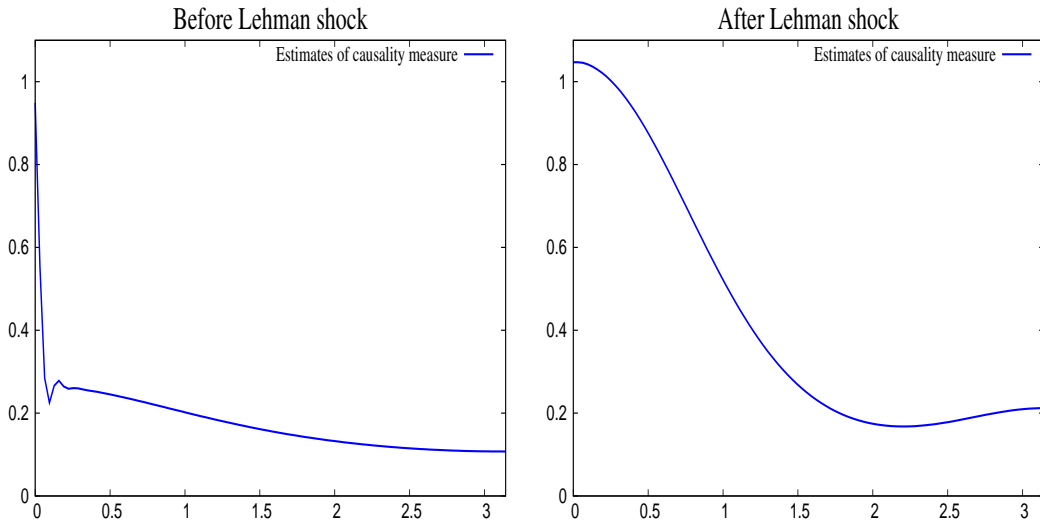


図 10: 因果性測度の推定値

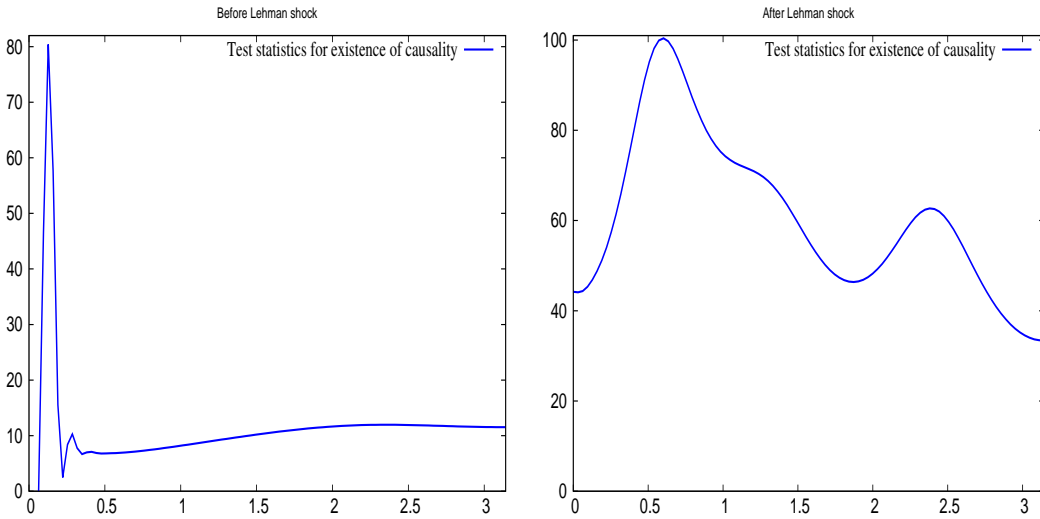


図 11: 因果性測度がゼロであることに対する Wald 検定統計量

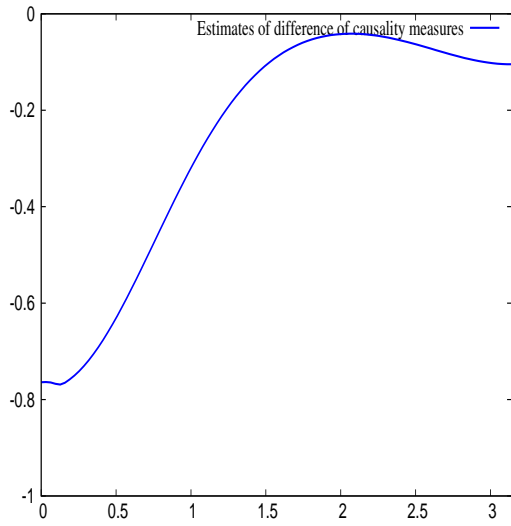


図 12: 因果性測度の差の推定値

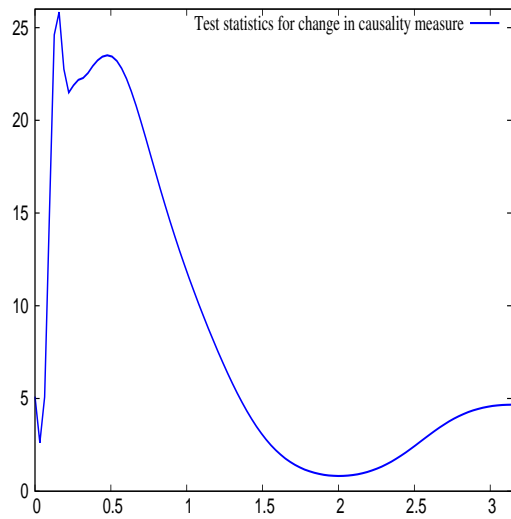


図 13: 因果性測度の変化に対する Wald 検定統計量

6 結語

本稿では, Geweke (1982), Hosoya (1991) で導入された周波数領域における因果性測度に基づいて, モデルに構造変化が生じているときの因果性の変化を検出するための検定統計量を導出した. また Yao and Hosoya (2000) における議論を踏襲することで, 誤差修正モデルにおける構造変化と因果性の変化に関する検証を行うことが可能であることが示された.

導出された検定統計量の有限標本特性をモンテカルロ実験によって分析した. その結果, 定常 VAR モデルと誤差修正モデルにおいて検定のサイズに下方バイアスが生じる事が確認された. また, 応用例として日米の株価指数である TOPIX と S & P 500 を用いた実証分析を行い, リーマンショックの以前と以降と比較して, S & P 500 から TOPIX への因果性が強くなっていることが統計的に有意に確認された.

本稿で導出した検定統計量は, 構造変化点を所与としているが, 複数の特定の期間における因果性の程度の違いを検証目的とするような実際の分析においても, ここで示された検証方法が適用可能である. 一方で, 構造変化点が未知の場合には, モデルの構造変化点の検出と同時に因果性測度に有意な変化が生じているかどうかを検定することが必要になるが, その点に関しては, 今後の課題としたい.

参考文献

- Akaike, H.(1968), On the use of a linear model for the identification of feedback systems, *Annals of Institute of Statistical Mathematics*, **20**, 425-439.
- Breitung, J., Candelon, B.(2006), Testing for short- and long-run causality: A frequency-domain approach, *Journal of Econometrics*, **132**, 363-378.
- Breneau, C., Jondeau, E.(2006), Long-run causality, with application to international links between long-term interest rates, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **61**, 545-568.
- Doornik, J.A.(2007), *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*, 3rd ed. London, Timberlake Consultants Press.

- Geweke, J.(1982), Measurement of linear dependence and feedback between multiple time series, *Journal of the American Statistical Society*, **77**, 303-314.
- Granger,C.W.J.(1963), Economic process involving feedback, *Information and Control*, **6**, 28-48.
- Granger, C.W.J.(1969), Investigating causal relations by cross-spectrum methods, *Econometrica*, **37**, 424-438.
- Granger, C.W.J., Lin, J.L. (1995), Causality in the long run, *Econometric Theory*, **11**, 530-536.
- Hosoya, Y.(1991), The decomposition and measurement of the interdependency between second-order stationary processes, *Probability Theory and Related Fields*, **88**, 429-444.
- Hannan, E.J, Quinn, B.G.(1979), The Determination of the order of an autoregression, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **41**, 190-195.
- Hosoya, Y.(2001), Elimination of third-series effect and defining partial measures of causality, *Journal of Time series Analysis*, **22**, 537-554.
- Johansen, S.(1991), Estimation and hypothesis testing of cointegrating vectors in Gaussian vector autoregressive models, *Econometrica*, **59**, 1551-1580.
- Johansen, S.(1995), *Likelihood based inference in cointegrated auto-regressive models*, Oxford University Press, Oxford.
- Magnus, J.R., Neudecker, H.(1988), *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*, Wiley, New York.
- Yao, F., Hosoya, Y.(2000), Inference on one-way effect and evidence in Japanese macroeconomic data, *Journal of Econometrics*, **98**, 225-255.
- 国友直人, 山本 拓 (1986), 「多変量時系列における因果序列と仮説検定及びマクロ計量分析への応用 (1)」, 東京大学経済学部『経済学論集』, **51(4)**, 15-27.

国友直人, 山本 拓 (1986), 「多変量時系列における因果序列と仮説検定及びマクロ計量分析への応用 (2・完)」, 東京大学経済学部『経済学論集』52(1), 30-50.

Measurement of causality change between multiple time series

Ryo Kinoshita[†] and Kosuke Oya[‡]

abstract

Structural change is gauged with the change of parameters in the model. In the case of multiple time series model, the causality between the time series also changes when there is a structural change. However the magnitude of change in causality is not clear in the case of structural change. We explore the measure of causality change between the time series and propose the test statistic whether there is any significance change in the causal relationship using frequency domain causality measure given by Geweke (1982) and Hosoya (1991). These procedures can be applied to error correction model which is non-stationary time series. The properties of the measure and test statistic are examined through the Monte Carlo simulation. As an example of application, the change in causality between United states and Japanese stock indexes is tested.

JEL Classification Code: C01, C19

Keywords : Causality, Frequency domain, Error correction model, Structural breaks

[†]Graduate School of Economics, Osaka University, 1-7 Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan. Email address:kge003kr@mail2.econ.osaka-u.ac.jp

[‡]Graduate School of Economics & Center for the Study of Finance and Insurance, Osaka University, 1-7 Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan. Email address:oya@econ.osaka-u.ac.jp