Discussion Papers In Economics And Business

我が国の株式市場におけるボラティリティの
ラフ性の検証

鄭　旭珠
生方 雅人
大屋 幸輔

Discussion Paper 25-17

November 2025

Graduate School of Economics
The University of Osaka, Toyonaka, Osaka 560-0043, JAPAN

我が国の株式市場におけるボラティリティの ラフ性の検証

鄭　　旭珠[*]
生方　雅人[†]
大屋　幸輔[‡]

要旨

本研究は，近年注目を集めているラフ・ボラティリティ，すなわち従来のボラティリティモデルでは捉えきれないラフな挙動を示すボラティリティの存在について検討する。観測価格データに内在するマイクロストラクチャー・ノイズによって生じている見せかけのラフ性なのか，あるいはノイズの影響を考慮してもなお存在する性質であるのかを，市場で高頻度に観測される日経平均，および代表的な二つの個別銘柄の価格データを用いて検証を行う。複数の代表的なボラティリティ推定手法により推定されたボラティリティ系列に対し，先行研究において提案されたハースト指数のノンパラメトリック推定法を適用したところ，マイクロストラクチャー・ノイズの有無にかかわらず，推定されたハースト指数はいずれも小さい値を示し，対象とするボラティリティ系列がラフ性を有する可能性を示唆する結果が得られた。本研究の結果は，金融市場におけるボラティリティのダイナミクスを精緻に理解するうえで，ラフ性を考慮することの必要性を支持する知見を提供するものである。

JEL: C14, C55, C58
Keyword: 高頻度データ，ボラティリティ，ラフ性

---

[*] 大阪大学大学院経済学研究科：u088026j@ecs.osaka-u.ac.jp
[†] 明治学院大学経済学部：ubukata@eco.meijigakuin.ac.jp
[‡] 大阪大学大学院経済学研究科，数理・データ科学教育研究センター：oya@econ.osaka-u.ac.jp

1. はじめに

ボラティリティは，単にマーケットの変動の大きさをあらわす統計的な値にとどまらず，オプションの価格付けにおいては，想定されたモデルから理論価格を導く際に必要とされる重要な値である。モデルと観測事象との整合性については，例えば，ブラック・ショールズ（BS）モデルではボラティリティは一定とされるが，観測されるオプション価格から，BS モデルを通して逆算されるインプライド・ボラティリティは，権利行使価格や満期まで期間の長さに依存して，一定でないことが知られている。このようなモデルへの理論的な要請やモデルから導かれる帰結と，観測される事象の不整合性は，モデルが適切でない証左とも考えられる。この問題を解消する方向の一つとして，確率的ボラティリティ（SV: Stochastic Volatility）モデルが考えられている。しかし，ランダム性（確率的な振る舞い）の源を通常のブラウン運動とする代表的な SV モデルでも，短い満期になるほど，権利行使価格の変化に対するインプライド・ボラティリティの変化がより大きくなるという事象を表現するに至っていない。これに対して Alos et al. (2007)や Fukasawa (2011)は，ボラティリティがハースト指数 H で特徴づけられる非整数ブラウン運動(fBm: fractional Brownian motion)で駆動されるモデルで，この事象が表現できることを示している。

近年，ラフ・ボラティリティという文字通り，通常よりラフな挙動を示すボラティリティの存在が注目を集めているが，これは変動の激しい（ラフな）確率過程である $H < 0.5$ の fBm によってボラティリティが駆動される状況を指している[1]。Gatheral et al. (2018)は，市場で高頻度に観測される価格データによるボラティリティの推定系列は，粗い挙動を示しており，fBm をベースにする Rough Fractional Stochastic Volatility（RFSV）モデルによって説明できること，さらに，RFSV モデルによる予測の精度が，比較的予測精度が高いとされる Corsi (2009) による HAR モデルよりも高いことを主張している。実際，ボラティリティがラフであるかどうかを巡っては，Fukasawa et al. (2022) や Cont and Das

[1] ラフ・ボラティリティについては Hiraki and Shinozaki (2025)に詳細なサーベイがある。

(2024) などの研究があるが，論点はハースト指数 H の推定に集約されているといってよい。本稿では，これまで提案されている幾つかのタイプのハースト指数 H の推定法について，実際に市場で観測される高頻度データを利用して，それらの特徴，性質を明らかにすることを目的としている。

2. ハースト指数 H の推定

ここでは日次のボラティリティについて考える。第 t 日のボラティリティを σ_t，その代理変数としての実現ボラティリティを $\hat{\sigma}_t = \sqrt{\hat{\sigma}_t^2}$ とする。ただし $\hat{\sigma}_t^2$ は実現分散である。このとき，いくつかの仮定の下，Gatheral et al. (2018) や Fukasawa et al. (2022) で示されているように， $\mathrm{E}[\,|\log\sigma_\Delta - \log\sigma_0|^q\,] = b_q\Delta^{\zeta_q}$ という関係が成立することから，この標本版を対数変換することで得られる関係式として以下のように，$|\log\sigma_{t+\Delta} - \log\sigma_t|^q$ の算術平均の対数に，$\log\Delta$ を回帰することで，ζ_q の推定値を得る方法が提案されている。

$$\log\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|\log\sigma_{t+\Delta} - \log\sigma_t|^q \approx \zeta_q\log\Delta + \eta_q \tag{1}$$

さらにボラティリティ σ_t が fBm で駆動されているならば， $\zeta_q \sim Hq$ であることから，ハースト指数 H は ζ_q の推定値を q に回帰して推定することができる。

この推定法に対し，Bennedsen (2020) では，マイクロストラクチャー・ノイズのような観測誤差が，H の推定にどの程度，バイアスをもたらすのかについて検証し，新たにノイズに頑健な推定方法を提唱している。ボラティリティを駆動する確率過程とは独立なマイクロストラクチャー・ノイズの分散を σ_u^2 とし，対数ボラティリティ $\log\sigma_t$ の 2 次のバリオグラムを $\gamma_2(h)$，対数実現ボラティリティ $\log\hat{\sigma}_t$ の 2 次のバリオグラムを $\gamma_2^*(h)$ とする。$L(x), x \in (0,\infty)$ は 0 の近傍で，連続微分可能で， 0 から離れて正の下界をもち，全ての $t > 0$ に対し，$\lim_{x\to 0} L(tx)/L(x) = 1$ となる緩変動関数とする。2 次のバリオグラ

ムとマイクロストラクチャー・ノイズに対する種々の仮定の下，ある $\alpha \in (-1/2,1/2)$ に対して，

$$\gamma_2^*(h) = \mathrm{E}[|\log\hat{\sigma}_{t+h} - \log\hat{\sigma}_t|^2] = 2\sigma_u^2 + \gamma_2(h) = 2\sigma_u^2 + C_2|h|^{2\alpha+1}L(h) \qquad (2)$$

が成り立つ。α と fBm のハースト指数 H との関係は $H = \alpha + 1/2$ である。ここで $f_2(h;\kappa) = \gamma_2^*(\kappa h) - \gamma_2^*(h)$ とすると，(2)より $f_2(h;k)$ は

$$f_2(h;k) = \gamma_2(\kappa h) - \gamma_2(h) = C_2|h|^{2\alpha+1}\left(\kappa^{2\alpha+1}L(\kappa h) - L(h)\right)$$

であることから，$\log f_2(h,\kappa)$ の $\log h$ による線形表現

$$\log f_2(h,\kappa) = \log C_2 + (2\alpha+1)\log h + \log\left(\kappa^{2\alpha+1}L(\kappa h) - L(h)\right)$$

が得られる。Bennedsen (2020) は，時点 $t = 1,2,\dots,n$ を $i = 1/n, 2/n, \dots, 1$ と変更し，$\log\hat{\sigma}_{1/n}, \log\hat{\sigma}_{2/n}, \dots, \log\hat{\sigma}_1$ を用いて，$\gamma_2^*(k/n)$ を

$$\hat{\gamma}_2^*(k/n) = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}\left|\log\hat{\sigma}_{(i+k)/n} - \log\hat{\sigma}_{i/n}\right|^2$$

によって推定する。そして，以下のように $\hat{f}_p(k/n) = \hat{\gamma}_2^*(\kappa k/n) - \hat{\gamma}_2^*(k/n)$ の対数を $\log|k/n|$ に回帰することで，α を OLS 推定する方法を提案している。

$$\log\hat{f}_2(k/n) = b^* + a^*\log\left|\frac{k}{n}\right| + U_{k,n}^* + \varepsilon_{k,n}^*, \qquad k = 1,2,\dots,m, \qquad (3)$$

$$\hat{\alpha}^* = \frac{1}{2}(\hat{a}_{OLS}^* - 1) \qquad (4)$$

従って，ハースト指数の推定量は $\hat{H}^* = \hat{\alpha}^* + 1/2$ となる。ここで $U_{k,n}^* + \varepsilon_{k,n}^*$ は回帰式の誤差項に相当する。詳細については Bennedsen (2020) を参照。

マイクロストラクチャー・ノイズが無い場合，$\gamma_2^*(h) = C_2|h|^{2\alpha+1}L(h)$ より，$\log\hat{\gamma}_2^*(k/n)$ を $\log|k/n|$ に回帰することで，α を一致推定することができる。しかし，その推定量はマイクロストラクチャー・ノイズがある場合，下方にバイアスを持ち，漸近的に -1/2 に収束することが Bennedsen (2020) で示されている。ハースト指数 H の推定量では，0 に確率収束することになり，マイクロストラクチャー・ノイズによって，見せかけのラフ性がもたらされる根拠となっている。

次に，Bennedsen (2020)と同じく，特定のパラメトリックなモデルにもとづかない推定法として，Cont and Das (2024) について考察する。

観測頻度 n で，区間 $[0,T]$を $N(\pi^n)$ 個の区間に分割する分割を $\pi^n = \left(0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{N(\pi^n)}^n = T\right)$ とする。ここで，サンプルサイズが L での分割 π^L と，その分割 π^L の部分分割 π^K を考える。K は部分分割のブロックサイズで，$L \gg K$ である。詳細は割愛するが，以下で定義する統計量

$$W(L,K,\pi,p,t,X) = \sum_{\pi^K \cap [0,t]} \frac{\left|X\left(t_{i+1}^K\right) - X\left(t_i^K\right)\right|^p}{\sum_{\pi^L \cap [t_i^K, t_{i+1}^K]} \left|X\left(t_{j+1}^L\right) - X\left(t_j^L\right)\right|^p} \times \left(t_{i+1}^K - t_i^K\right) \tag{5}$$

を用いて，$W\left(L,K,\pi,p_{L,K}^{\pi}(X),T,X\right) = T$ を $p_{L,K}^{\pi}(X)$ について解いたものを $\hat{p}_{L,K}^{\pi}(X)$ とすると，ハースト指数 H の推定量は以下の(6)で与えられる。

$$\hat{H}_{L,K}^{\pi}(X) = 1/\hat{p}_{L,K}^{\pi}(X) \tag{6}$$

Cont and Das (2024) では，ハースト指数 $H = 1/2$ の場合の fBm，すなわちラフ性のないモデルからボラティリティを生成し，そのボラティリティの系列による H の推定結果と，生成されている離散観測価格データからのボラティリティの推定系列を使った H の推定結果を比べ，前者ではバイアスなく推定できている一方で，後者では 0 方向へのバイアスが顕著であることを示し，見かけ上のラフ性が離散観測による近似誤差から生じている可能性を指摘している。

前述した 2 つの推定法は特定のモデルによらないノンパラメトリックな手法であるが，次節以降で，比較の目的でもちいるパラメトリックな手法として，以下では Fukasawa et al. (2022)によるハースト指数 H の推定について述べる。Fukasawa et al. (2022) では観測されないボラティリティの過程に，fBm で駆動されるモデルを仮定し，対数実現分散の系列をもちいた擬似最尤推定法として，Whittle 推定量を提案している。推定量の漸近的な性質には，仮定されたモデルから生成される分散と実現分散の差の影響が考慮されており，Cont and Das (2024) で指摘されている近似誤差による見かけ上のラフ性への対処がなされている[2]。

3. 実現ボラティリティについて

本稿では，直接観測されないボラティリティの日次の系列として，取引時間に高頻度に観測される収益率による日次のボラティリティの推定値を利用する。マイクロストラクチャー・ノイズの影響を緩和するため，利用可能な最も高頻度の観測データを疎サンプリング（sparse sampling）し，5 分間収益率の二乗和から得られる実現分散（RV: Realized Variance）を基準とする（$\sqrt{RV}$を実現ボラティリティとする）。さらに，ハースト指数 H の推定に与えうるボラティリティ推定量特性や離散観測による近似誤差の差異を検討するため，ノイズの影響を受けやすい 1 分間収益率の RV，様々の時間間隔収益率による RV，利用可能な最も高頻度の時間間隔の収益率を使用してもなおノイズに対して頑健な Barndorff-Nielsen et al.（2011）のカーネル法による RV（RK: Realized Kernel），ならびにノイズとジャンプの影響を抑制した拡散成分に基づく推定量として 5 分間収益率の絶対値を用いて計測される Barndorff-Nielsen and Shephard（2004）の実現二重積変動（RBV: Realized Bipower Variation）を併用する。なお，Pascalau and Poirier（2023）が指摘して

[2] Cont and Das (2024) では，Fukasawa et al. (2022)で課している，近似誤差の系列に対する独立性の仮定に関して，数値実験では相関が高く，独立とは言い難いことを指摘している。

いるように，日次ボラティリティに夜間（overnight）の情報を組み込むための決定的な手法は存在しない。加えて，日本市場には昼休みという取引中断時間も存在し同様である。Engle and Sokalska（2012）や Zhang et al. (2024)に従い，本稿では便宜上，夜間と昼休みの時間帯を除外したケースを日次ボラティリティと呼ぶこととする。

第 t 日に観測される対数価格の階差として定義される収益率を$\{r_{t_1}, r_{t_2}, \cdots, r_{t_M}\}$, $t_j = j/M$ とすると RV は

$$RV_t = \sum_{j=1}^{M} r_{t_j}^2 \tag{7}$$

として得られる。株価指数の高頻度系列は等間隔（$t_j = j/M$）となっているのに対し，個別株のように価格が等間隔に観測されない場合には，各時点においてその直前に観測された価格を用いて補間する方法（previous-tick method）を用いる。最も単純なケースとして，独立で同一な分布に従うマイクロストラクチャー・ノイズが存在する場合，RV のバイアスは $2\sigma_u^2 M$ となるため，一般的に M が大きくなるような 1 分間隔の RV はボラティリティを正確に推定できないことが知られている。多くの実証分析ではバイアスを緩和するために疎サンプリングを用いるが，それにより RV の分散が増大するトレードオフを考慮して，5 分間隔から 15 分間隔程度の RV が使用されている。本稿では 1 分間隔から 1 分刻みに 30 分間隔までの RV を計測している。

Barndorff-Nielsen et al.（2011）のカーネル法による RV（RK）は，いくつかの仮定の下，マイクロストラクチャー・ノイズが自己相関といったより複雑な特性を有する場合においても，非負定値性や漸近混合正規性をもつため，最も高頻度なデータを用いた計測が理論的に可能である。

$$RK_t = \sum_{j=1}^{M} r_{t_j}^2 + 2\sum_{i=1}^{M-1} \ell\left(\frac{i}{I}\right) \sum_{j=i+1}^{M} r_{t_j} r_{t_{j-i}} \tag{8}$$

関数 $\ell(y)$ には Parzen カーネル$\ell(y) = 1 - 6y^2 + 6y^3$（$0 \le y \le 0.5$に対して），$\ell(y) = 2(1-y)^3$（$0.5 \le y \le 1$に対して），$\ell(y) = 0$（それ以外の場合）が推奨される。帯域幅（bandwidth）I と呼ばれるチューニングパラメータの選択方法は Barndorff-Nielsen et al.（2009, 2011）等を参照されたい。なお，端点でのマイクロストラクチャー・ノイズの影響を除去する目的で，取引日の始点および終点において局所的な平均化を行うジッタリング法（jittering method）を導入可能である。Barndorff-Nielsen et al. (2009）は個別銘柄においてジッタリング法を適用しない場合と，端点のいくつかの価格で局所平均をとった複数の RK を計算しているが，それらの差は小さいと述べている。本稿ではジッタリング法を適用しない RK を RK(m=1)，オープニングとその次の価格の平均値を最初の価格，クロージングの価格とその直前の価格の平均値を最後の価格とするジッタリング法を適用した RK を RK(m=2)とする。

また，日経平均株価を用いた実証分析では RK に似た推定量として Barndorff-Nielsen et al. (2008)のフラットトップ型修正版テューキーハニングカーネル推定量（FTRK: Flat-top modified Tukey-Hanning kernel estimator)を計算している。FTRK は非負定値性をもたず，一致性はマイクロストラクチャー・ノイズが潜在的な価格過程と独立な i.i.d.列である場合に満たされるが，マイクロストラクチャー・ノイズの自己相関を無視できるような時間間隔の下では，FTRK の収束レートの速さを活かすことが可能である。

金融市場では，資産価格が不連続性，いわゆるジャンプを伴って観測されることがある。このとき，RV や RK は通常の拡散成分によるボラティリティに加えて，ジャンプによる二次変動を含む推定量となる。日次ボラティリティを高頻度データから推定する際には，ジャンプの二次変動を含めて測定するか，それともジャンプを分離して拡散成分のみを捉えるかは，研究目的に依存する。ジャンプが存在する下で，実現二重積変動（RBV）

$$RBV_t = \frac{\pi}{2}\sum_{j=2}^{M}\left|r_{t_j}\right|\left|r_{t_{j-1}}\right| \tag{9}$$

は(7)式の $r_{t_j}^2$ を隣接する高頻度収益率の絶対値の積に置き換え，$\pi/2$ によって適切に正規化したものであり，日次ボラティリティの拡散成分に対する推定量となる。なお，異なる高頻度収益率の積で推定量を構築する場合，RV と比較すると和の項が減少するため，有限標本特性を改善する目的で補正項を導入することができる。(9)式の場合，和の項が 1 つ失われるため，補正項として $M/(M-1)$ を掛け合わせることが一般的である。本稿では RV と同様に 1 分間隔から 1 分刻みに 30 分間隔までの RBV を計測している。

また，RBV と同じ拡散成分に対する推定量として Andersen et al. (2012)の中央値実現分散（MedRV: Median Realized Variance）はジャンプが存在する下でも漸近混合正規性をもつが，RBV は必ずしもそうであるとは限らない。本稿では，日経平均株価を用いた実証分析において MedRV も計算している。さらに，有意なジャンプの二次変動を検出して通常の拡散成分である連続変動（CV: Continuous variation)を推定する方法も存在する。Huang and Tauchen (2005)では RV と RBV を用い，Andersen et al. (2012)では RV と MedRV を用いて有意な日次のジャンプ変動を検出するための検定統計量を導出しており，これらを用いた CV を計測している。

4. 検証方法と実証結果

4.1 日経平均株価のハースト指数の推定

本節では，日経平均株価の高頻度観測データを用いて推定された日次ボラティリティ系列に対し，ラフ性の程度を表すハースト指数 H の実証的検証を行う。分析期間は 1996 年 3 月 11 日から 2023 年 9 月 29 日までとし，高速取引システム arrowhead が導入された 2010 年 1 月 4 日を境に，前半期 1996–2009 年（サンプルサイズ 3396）と後半期 2010–2023 年（サンプルサイズ 3364）に分け，市場構造の変化（高速取引システムの導入）がボラティリティのラフ性に及ぼす影響を比較検討する。また，マイクロストラクチャー・

ノイズの影響を考慮するため，1 分間隔および 5 分間隔の収益率に基づく実現分散 RV を中心に，頑健性の異なる複数のボラティリティ推定量を併用し，観測頻度の違いによる推定量の差異とともに評価する。

検証は以下の 2 段階で行った。第 1 段階では，観測頻度の違いがハースト指数 H の推定値に与える影響を把握するため，1 分間隔，5 分間隔の収益率に基づいて算出された各種実現ボラティリティの系列に対して，個別に H の推定を行う。具体的には，次の 8 種類のボラティリティ推定系列を用いた：(i) 実現分散 *RV*，(ii) 実現二重積変動 *BPV*，(iii) 中央値実現分散 *MedRV*，(iv, v) Parzen カーネルによる実現分散 *RK*, (m=1, 2)，(vi, vii) フラットトップ型修正版 Tuke-Hanning カーネル *FTRK*, (m=1, 2)，および (viii) *MedRV, BPV* に基づく連続変動 *CV* である。以下の分析では，これらの推定値の平方根をとったものをボラティリティの推定値としている。第 2 段階では，サンプル期間の違い（2010 年の高速取引システム導入前後）に着目し，市場制度の変更がラフ性の程度に及ぼす影響を比較している。Bennedsen（2020）で提案されているマイクロストラクチャー・ノイズに対する頑健な推定量に関しては，（4）で定義された対数バリオグラムに基づくロバスト推定量 $\hat{\alpha}^*$ を算出し，$H = \alpha + 1/2$ の関係式を用いた。

はじめに Cont and Das (2024) によるハースト指数 H の推定について見ていく。Cont and Das (2024) による推定では，部分分割のブロックサイズ K を定める必要がある。図 1 は，実現ボラティリティ $\sqrt{RV}$ の系列で，様々な Kの値に対して推定されたハースト指数 H の値を示しており，K の値の違いによるばらつきが大きいことがわかる。全体の傾向をつかむため，推定された系列の K に関する窓幅 10 の移動平均による系列もあわせて示している。以降，表にまとめる際の K については，Cont and Das (2024) に準拠し，サンプルサイズ L に対して $K = \sqrt{L} = 58$ とした。図 1 が示すように，サンプル期間の前

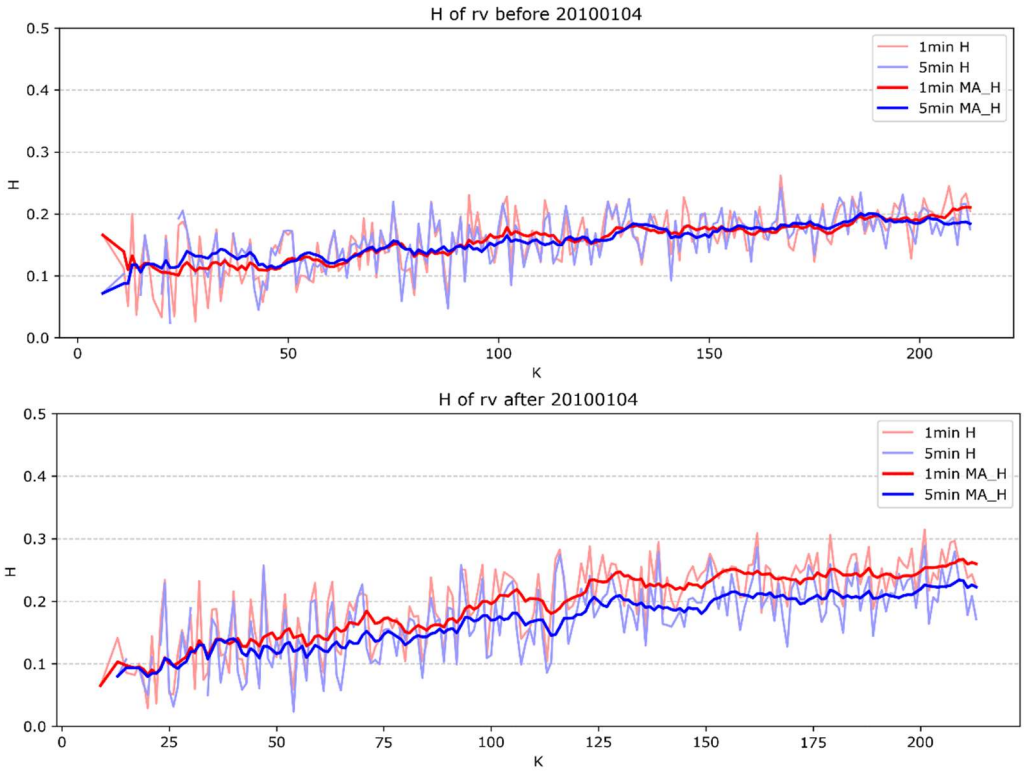


図 1　システム変更前後の K に対する H の移動平均の推移

半，後半ともに，推定されたハースト指数 Hは，様々な Kの値に対し，一様に 0.1～0.3 と低い値を示し，どのような値を K に設定したとしても明確なラフ性が確認できる。

表 1 は，それぞれの実現ボラティリティの系列に関するハースト指数 H の推定値をまとめたものである。標本期間の前半の 2010 年以前では，1 分$\sqrt{RV}$ で $H \approx 0.12$，5 分$\sqrt{RV}$ で $H \approx 0.13$ 程度で，後半期（2010 年以降）ではやや上昇する傾向が見られた（1 分$\sqrt{RV}$ で $H \approx 0.14$，5 分$\sqrt{RV}$ で $H \approx 0.13$）。$\sqrt{BPV}$ の場合，1 分データで $H \approx 0.14$，5 分データで $H \approx 0.12$ と推定され，$\sqrt{RV}$ と同様にラフ性を示しているが，ジャンプ成分除去によりやや滑らかな挙動となっている。後半期間の 2010 年以降の $\sqrt{RV}$，$\sqrt{BPV}$ は，いずれもわずかに上昇している。$\sqrt{MedRV}$ では，全体的に $\sqrt{BPV}$よりも高い Hが得られ，1 分データで $H \approx 0.13$（前期）から 0.16（後期）へ，5 分データでは $H \approx 0.12$ から 0.14 に上昇している。

表 1：K=58 の時の Hの移動平均

	1 分		5 分	
	前	後	前	後
$\sqrt{RV}$	0.1163	0.1439	0.1230	0.1295
$\sqrt{BPV}$	0.1385	0.1592	0.1218	0.1270
$\sqrt{MedRV}$	0.1329	0.1636	0.1240	0.1409
$\sqrt{RK}$(m=1)	0.0877	0.1345		
$\sqrt{RK}$(m=2)	0.0938	0.1338		
$\sqrt{FTRK}$ (m=1)	0.1141	0.1216	0.0880	0.0818
$\sqrt{FTRK}$ (m=2)	0.1129	0.1218	0.0736	0.0887

RK については最高頻度

表 2： $\sqrt{MedRV}$ CV と$\sqrt{BPV}$ CV の K=58 の時の H の移動平均

	(0.05)	
	前	後
$\sqrt{MedRV}$ CV	0.1112	0.1315
$\sqrt{BPV}$ CV	0.1236	0.1270

ノイズに対して頑健とされる $\sqrt{RK}$ と $\sqrt{FTRK}$ の場合，いずれも Hは 0.08～0.13 と低水準で，もっともラフな挙動を示した。なお，$\sqrt{RK}$を 1 分データで計測し，$\sqrt{FTRK}$を 1 分と 5 分のデータで計測しているのは，第 3 節で述べたように，$\sqrt{RK}$は複雑なノイズ構造の下で漸近混合正規性をもつため，高頻度なデータを用いた計測が理論的に有効であることが示されているのに対して，$\sqrt{FTRK}$の一致性はノイズが潜在的な価格過程と独立な i.i.d.列である場合に満たされるため，疎サンプリングとの組み合わせによる計測が有効となることが多いためである。高速取引システム導入の前後の期間での H の変化幅については，$\sqrt{RK}$ による結果が約 0.04～0.05 と最も大きかった。$\sqrt{FTRK}$ は他の推定量と比較して，1 分データと 5 分データにおける H の差異が一層際立っている。さらに，5 分データによる連続変動 CV ベースで推定された H（表 2 参照）は，$\sqrt{MedRV}$ CV でサンプル期間の前後それぞれで，0.11（前期），0.13（後期），$\sqrt{BPV}$ CV では 0.12（前期），0.13（後期）

と，わずかながら後半期間での上昇を示している。表 1 と比べて，ジャンプ成分や極端な値を除いた場合でも，大きな変化は観測されなかった[3]。最後に，Bennedsen（2020）のロバスト α 推定（附表 1）による検証では，$\sqrt{RV}$，$\sqrt{BPV}$，$\sqrt{MedRV}$ のいずれも $\hat{\alpha}^* \approx -0.3$ 〜-0.45 の範囲にあり，対応する $H = \alpha + 0.5$ は 0.05〜0.2 程度となった。ただ，2010 年以降の $\hat{\alpha}^*$ はやや小さく，ラフ性の程度が強まる傾向が確認された。これは Cont and Das（2024）の方法により直接算出したハースト指数 H がむしろ上昇傾向を示した結果と対照的である。

以上の結果を総合すると，いずれのハースト指数 H の推定法，そして使用したどのボラティリティ系列においても $H < 0.2$の範囲にあり，日経平均株価という指数でみる限り，日本株式市場のボラティリティは明確にラフであることが確認された。また，5 分データよりも 1 分データで H がやや大きい結果に関しては，パラメトリックモデルの推定ではあるが，Fukasawa et al. (2022) と同様の結果となった。

4.2 個別株のハースト指数測定

本節では，個別株のボラティリティのラフ性に関して，個別銘柄として代表的な高流動性銘柄であるソフトバンクグループ株式会社（SoftBank）とトヨタ自動車株式会社（Toyota）を取り上げる。分析期間は 2003 年 11 月 4 日から 2023 年 2 月 28 日までとし，2010 年を境に前半期（2009 年 12 月 30 日まで）と後半期（2010 年 1 月 4 日から）に区分した。推定には，取引価格（execution price）と気配値（mid-quote）の両方を用い，1 分間隔および 5 分間隔のそれぞれの収益率に基づく実現分散 RV，実現二重積変動 BPV，および RK を算出した。K の設定については前節と同様に Cont and Das (2024) の手法に倣い，サンプルサイズ Lに対して $K = \sqrt{L}$としているが，推定値のばらつきを考慮

[3] ここでは，ジャンプ検定の有意水準を 0.05 に設定している。

表 3　Softbank の $K = \sqrt{L}$ の時の H の移動平均

Softbank		1 分		5 分	
		前	後	前	後
気配値ベース	$\sqrt{RV}$	0.1584	0.1510	0.1273	0.1236
	$\sqrt{BPV}$	0.1601	0.1268	0.1681	0.1152
	$\sqrt{RK}$	0.1283	0.1811		
取引価格ベース	$\sqrt{RV}$	0.1841	0.1477	0.1327	0.1242
	$\sqrt{BPV}$	0.1825	0.1359	0.1492	0.1099
	$\sqrt{RK}$	0.1357	0.1189		

RK については最高頻度

表 4　Toyota の$K = \sqrt{L}$ の時の H の移動平均

Toyota		1 分		5 分	
		前	後	前	後
気配値ベース	$\sqrt{RV}$	0.1210	0.1116	0.1255	0.1085
	$\sqrt{BPV}$	0.1234	0.1458	0.1061	0.1292
	$\sqrt{RK}$	0.1068	0.1004		
取引価格ベース	$\sqrt{RV}$	0.1505	0.1464	0.1027	0.1268
	$\sqrt{BPV}$	0.1027	0.1245	0.0782	0.0989
	$\sqrt{RK}$	0.0896	0.1227		

RK については最高頻度

して，表では窓幅 10 の移動平均の値を示している。$\sqrt{RV}$に基づく推定結果をみると（表 3，表 4 参照），SoftBank では全体を通じて $H \approx 0.12$〜0.18程度であり，株価指数である日経平均よりもやや高い水準を示した。特に，気配値ベースの場合，2010 年前後で大きな構造変化は見られていない。一方で，1 分データでは 5 分データに比べて推定された H が明らかに高く，日経平均の場合と同様の傾向が確認された。ただし，何れの銘柄も前期から後期で H の気配値ベースでの推定値が若干低下している点は日経平均の場合と逆

である。全体的に，取引価格ベースでのラフ性の程度は気配値ベースより低い（H の推定値は大きい）結果となった。

Toyota では，SoftBank に比べて Hの水準が一貫して低く（おおむね 0.10〜0.15），よりラフな挙動を示した。特に気配値ベースの場合，1 分データと 5 分データの差はほとんど見られず，SoftBank や日経平均の結果とは対照的である。これら検証に用いた 2 銘柄はどちらも高流動性銘柄であるが，SoftBank はトヨタに比べて日次の取引頻度が格段に高く，その違いによりラフ性の水準や方向性が異なる可能性はあり得るが，その結論を得るには，2 銘柄による検証では不十分であり，より多くの個別銘柄を使った詳細な分析が必要となる。$\sqrt{BPV}$に基づく結果をみると，SoftBank の場合，ジャンプ成分を除いたにもかかわらず依然として $H < 0.2$の範囲にあり，ラフな特性が維持されている。2010 年以降には Hが明確に低下する傾向がみられ，構造変化の度合いは 0.04〜0.05 と，$\sqrt{RV}$の場合よりも顕著に表れている。さらに日経平均株価の $\sqrt{BPV}$の結果と比較すると，SoftBank では 2010 年以前の Hが明確に高く，2010 年以降にはむしろ低くなっており，両者の相対的な関係が入れ替わっている。一方，Toyota では逆に，2010 年以降に Hが上昇する傾向がみられるが，SoftBank や自社の $\sqrt{RV}$の場合，さらには日経平均株価の $\sqrt{BPV}$の結果と比較しても，取引価格ベースの Hは明確な低下を示している。とりわけ 5 分データにおいてこの傾向が顕著であった。気配値として使用している仲値では，ある程度ノイズが除去されているのに対し，取引価格では約定タイミングやスプレッド変動の影響を直接受けるため，後者の H がより低くなっていると考えられる。また，SoftBank と Toyota のいずれにおいても，$\sqrt{BPV}$ に基づく推定結果では，1 分データよりも 5 分データの方が Hが大きく，ラフ性が弱い傾向が確認された。この傾向は，日経平均株価の結果とも整合的である。$\sqrt{RK}$ による結果では，SoftBank・Toyota ともに Hの推定値はおおむね 0.10〜0.18 の範囲であり，他の推定法と同様にラフなボラティリティ構造を示した。ただし，SoftBank の気配値ベースでは Hが 2010 年以降に上昇している一方で，取

引価格ベースでは低下しており，観測価格の選択により推定方向が逆転している。Toyota では，全体として SoftBank よりも H の水準が低く，よりラフな特性を示している。特に気配値ベースではこの傾向が顕著である。一方，取引価格ベースでは SoftBank と同様に 2010 年以降に H が上昇しており，後期におけるラフ性の緩和が確認された。さらに，日経平均株価の $\sqrt{RK}$の結果と比較すると，SoftBank はそれよりやや滑らか（H が大きい）であるのに対し，Toyota は概ね同程度の水準に位置している結果となった。

4.3 ティックサイズがハースト指数推定に及ぼす影響

4.1 節，4.2 節では，高速取引システムの導入（2010 年前後）を境とした構造変化に焦点をあてたが，ここでは別の市場マイクロストラクチャー要因としてティックサイズ（最小価格変動単位）の変化に着目する。ティックサイズは取引価格の離散性やスプレッド形成を通じて価格変動の大きさを規定し，特に高頻度データにおけるボラティリティ推定やラフ性評価に影響を及ぼす可能性がある。従って本節では，ティックサイズを指標とした市場構造変化がラフ性に及ぼす影響の有無を検証する頑健性分析として位置づける。前節までと同様に，SoftBank および Toyota の 1 分，5 分収益率に基づく $\sqrt{RV}$，$\sqrt{BPV}$，および $\sqrt{RK}$の 3 つのボラティリティ推定量を用いる。図 2 および図 3 は，両銘柄におけるティックサイズの推移を示したものである。赤い破線で区切られた期間内ではティックサイズが相対的に安定していたことを示している。図より SoftBank のティックサイズが Toyota に比べて安定していなかったことが分かる。両銘柄とも 2009 年 12 月 30 日および 2014 年 1 月 14 日にティックサイズの変更が確認されているが，前者はシステム導入前の

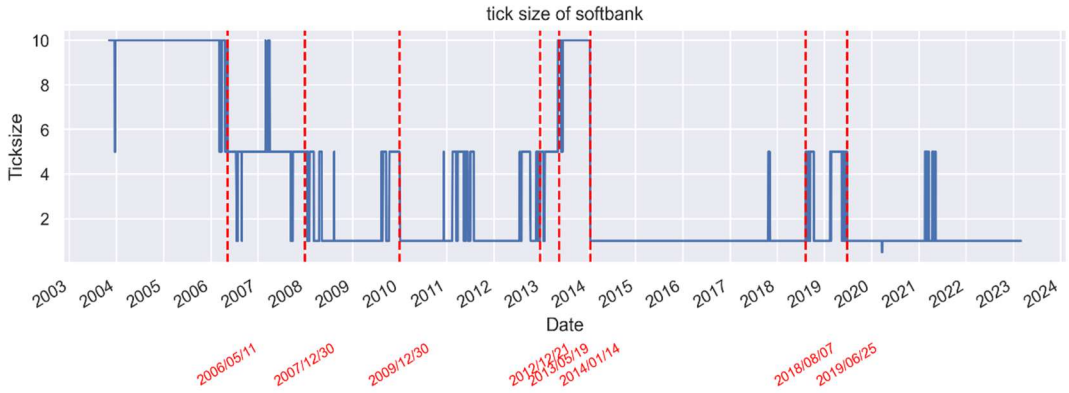


図 2　Softbank のティックサイズ変動推移

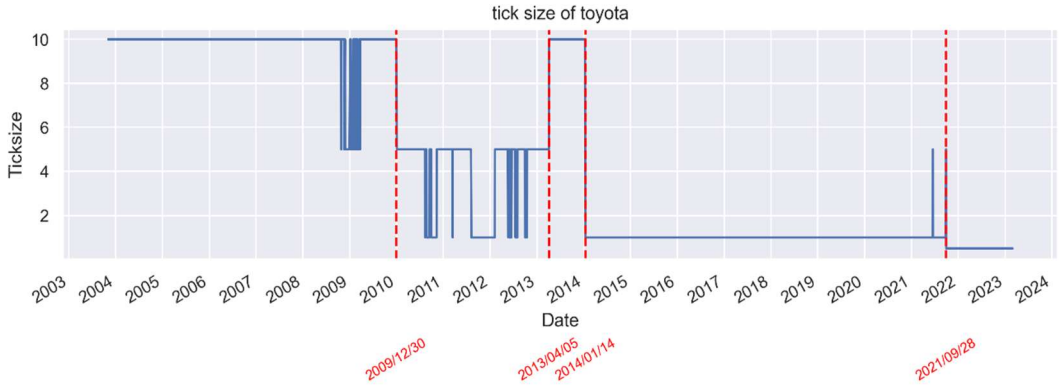


図 3　Toyota のティックサイズ変動推移

節目でもある。従って，本節のティックサイズに関する検証は，両銘柄のティックサイズが最小単位である 1 に安定化した 2014 年 1 月 14 日から 2023 年 2 月 28 日までの期間を主な分析対象としている。ブロックサイズ Kの設定は前節と同様に推定期間を通じて一貫して $K = \sqrt{L} = 47$とした。つまり，最小価格変動単位が 1 に固定された期間のラフ性と，ティックサイズが 1，5，10 と変わり安定していなかった期間（SoftBank），および 10 で安定していた期間（Toyota） におけるラフ性を比較し，ティックサイズの変動が Hの推定に与える影響を検討する。

表 5　Softbank の$K=\sqrt{L}$ の時の H の移動平均

Softbank		1 分		5 分	
Tick size 変動		前	後	前	後
気配値ベース	$\sqrt{RV}$	0.1584	0.1339	0.1273	0.1097
	$\sqrt{BPV}$	0.1601	0.1338	0.1681	0.0980
	$\sqrt{RK}$	0.1283	0.1289		
取引価格ベース	$\sqrt{RV}$	0.1841	0.1318	0.1327	0.1097
	$\sqrt{BPV}$	0.1825	0.1318	0.1492	0.1112
	$\sqrt{RK}$	0.1357	0.1279		

RK については最高頻度

表 6　Toyota の$K=\sqrt{L}$ の時の H の移動平均

Toyota		1 分		5 分	
Tick size 変動		前	後	前	後
気配値ベース	$\sqrt{RV}$	0.1210	0.1695	0.1255	0.1155
	$\sqrt{BPV}$	0.1234	0.1639	0.1061	0.1565
	$\sqrt{RK}$	0.1068	0.1368		
取引価格ベース	$\sqrt{RV}$	0.1505	0.1463	0.1027	0.1300
	$\sqrt{BPV}$	0.1027	0.1702	0.0782	0.1358
	$\sqrt{RK}$	0.0896	0.1579		

RK については最高頻度

まず，実現分散 $\sqrt{RV}$ に基づく結果をみると，SoftBank の場合には，ティックサイズ変更前後で Hの差が拡大しており，特にティックサイズが 1 に安定した期間（2014 年 1 月 14 日以降）では，高速取引システム導入期（2010 年後）よりも H がわずかに低下している。これは，2010 年前と比較してもラフ性がやや強まったことを意味している。一方，Toyota では全体的に大きな変化はみられず，ティックサイズが 1 に固定された後も H

の水準は概ね安定している。ただし，気配値ベースの 1 分データにおいては 2014 年以降に H が明確に上昇する。次に，実現二重積変動 $\sqrt{BPV}$ に基づく結果をみると，SoftBank の場合にはティックサイズ変化による大きな差は確認されず，全体として H の水準はほぼ一定であった。一方，Toyota では H が高速取引システム導入期よりも高く，ティックサイズが 1 に固定された後に全体的な上昇傾向がみられた。特に取引価格ベースでは上昇幅が約 0.04 と明確であり，気配値ベースでもわずかな上昇が観察された。その結果，2010 年前後の構造変化期に比べて，ティックサイズ変更前後での H の差が拡大していることが確認された。最後に，$\sqrt{RK}$ の結果をみると，SoftBank の気配値ベースでは，2010 年以降の期間に比べて H が約 0.05 低下し，ティックサイズ変更前後でほぼ同水準となった。これはティックサイズの安定化により構造変化期に見られた差が縮小したことを示している。一方，取引価格ベースではティックサイズが 1 に固定された期間において H がわずかに上昇しており構造変化による H の乖離が小さくなった。Toyota では対照的に，気配値ベース，取引価格ベースのいずれのボラティリティ推定においても，2010 年以降の期間と比べてラフ性が弱まり（H が上昇し），結果としてティックサイズ変更前後の H の差が拡大していることが確認された。

5. 結論

ボラティリティがラフであるかどうかに関する先行研究の論点はハースト指数 H の推定であるが，一方で，市場で直接観測されないボラティリティの系列がラフであるかどうかに言及するには，ボラティリティの推定法の違いが，ハースト指数 H の推定にどの程度影響を与えるのかを明らかにする必要がある。本稿では先行研究で提案されているノンパラメトリックな推定法を，マイクロストラクチャー・ノイズやジャンプに頑健な代表的な推定法で推定された実現ボラティリティの系列へ適用し，それらの性質を明らかにした。

1 分間隔と 5 分間隔のデータを利用した実現ボラティリティについては，日経平均株価，個別銘柄ともに，推定されたハースト指数は 5 分間隔のデータによるものの方が小さく，よりラフであることが示された。また 2010 年初頭に市場に導入された高速取引システムの導入前後の期間におけるラフ性の程度の違いについては，日経平均株価による分析では，導入後にラフ性が弱まったことが確認されたが，サンプリング間隔を拡大した 5 分データやノイズ補正を施した RK の場合でも H が依然として低く，ラフ性の強さはノイズ量とは一貫した関係を示さなかった。ノイズの影響がもともと小さい 5 分間隔データを利用し，カーネル法の適用によってノイズ補正を施しているにもかかわらず，より低い H の推定値が得られている結果は，ラフ性の主たる要因がマイクロストラクチャー・ノイズではない可能性を示唆している。ティックサイズの最小単位 1 への安定化は，Toyota においてラフ性の程度をやや緩和させ，前後期の差を拡大させた可能性がある。また，ノイズ補正の導入が構造変化に伴うラフ性の差異を一定程度促進した可能性もある。しかしながら個別銘柄について一様に明確な結果は得られていない。個別銘柄に関しては，多くの銘柄での検証が必要とされるため，今後の研究課題としたい。

参考文献

Alòs, E., León, J. A., & Vives, J. (2007). On the short-time behavior of the implied volatility for jump-diffusion models with stochastic volatility. Finance and Stochastics, 11(4), 571–589.

Andersen, T. G., Dobrev, D., & Schaumburg, E. (2012). Jump-robust volatility estimation using nearest neighbor truncation. Journal of Econometrics, 169(1), 75–93.

Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2004). Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps. Journal of Financial Econometrics, 2(1), 1–37.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A., & Shephard, N. (2008). Designing realized kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise. Econometrica, 76(6), 1481–1536.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A., & Shephard, N. (2009). Realized kernels in practice: Trades and quotes. Econometrics Journal, 12(3), C1–C32.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A., & Shephard, N. (2011). Multivariate realised kernels: Consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise and non-synchronous trading. Journal of Econometrics, 162(2), 149–169.

Bennedsen, M. (2020). Semiparametric estimation and inference on the fractal index of Gaussian and conditionally Gaussian time series data. Econometric Reviews, 39(9), 875–903.

Cont, R., & Das, P. (2024). Rough volatility: Fact or artefact? Sankhya B, 86, 191–223.

Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility. Journal of Financial Econometrics, 7(2), 174–196.

Engle, R. F., & Sokalska, M. E. (2012). Forecasting intraday volatility in the US equity market: Multiplicative component GARCH. Journal of Financial Econometrics, 10(1), 54–83.

Fukasawa, M. (2011). Asymptotic analysis for stochastic volatility: Martingale expansion. Finance and Stochastics, 15, 635–654.

Fukasawa, M., Takabatake, T., & Westphal, R. (2022). Consistent estimation for fractional stochastic volatility model under high-frequency asymptotics. Mathematical Finance, 32(4), 1086–1132.

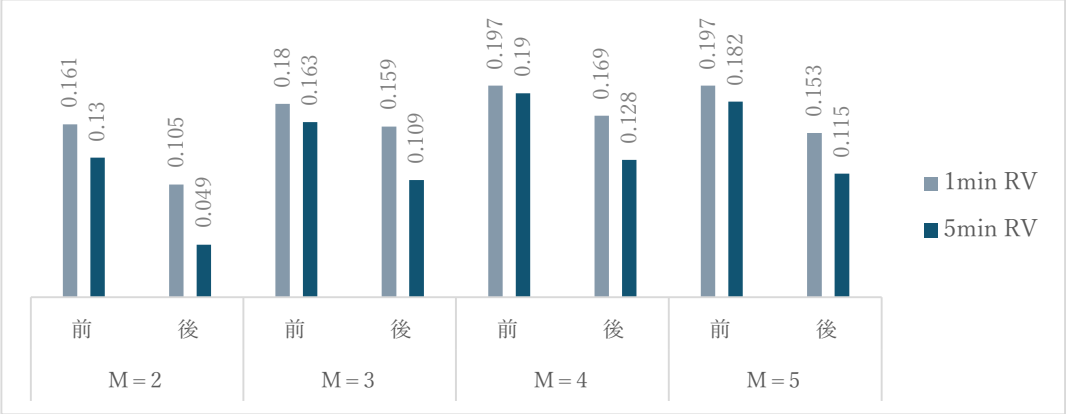
Gatheral, J., Jaisson, T., & Rosenbaum, M. (2018). Volatility is rough. Quantitative Finance, 18(6), 933–949.

Hiraki, K., & Shinozaki, Y. (2025). A Survey of Rough Volatility. International Journal of Theoretical and Applied Finance, doi:10.1142/S0219024925300021.

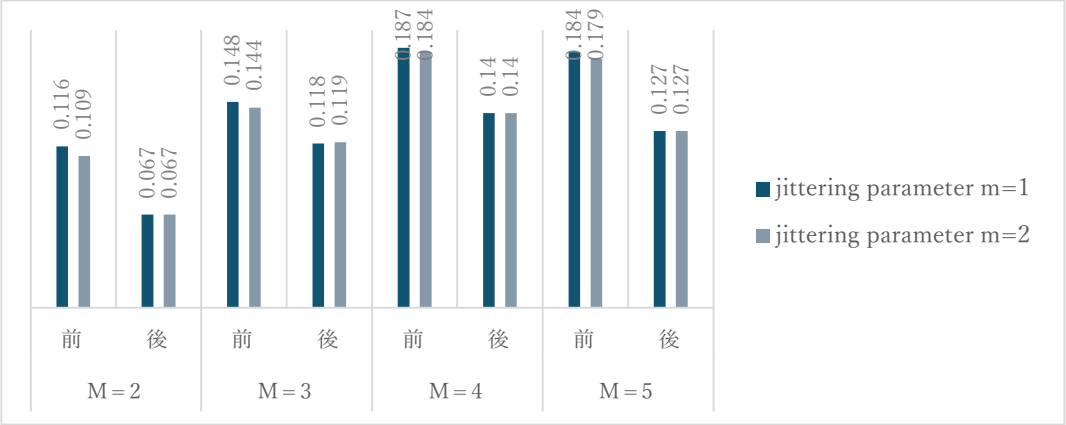
Huang, X., & Tauchen, G. (2005). The relative contribution of jumps to total price variance. Journal of Financial Econometrics, 3(4), 456–499.

Pascalau, R., & Poirier, R. (2023). Increasing the information content of realized volatility forecasts. Journal of Financial Econometrics, 21(4), 1064–1098.

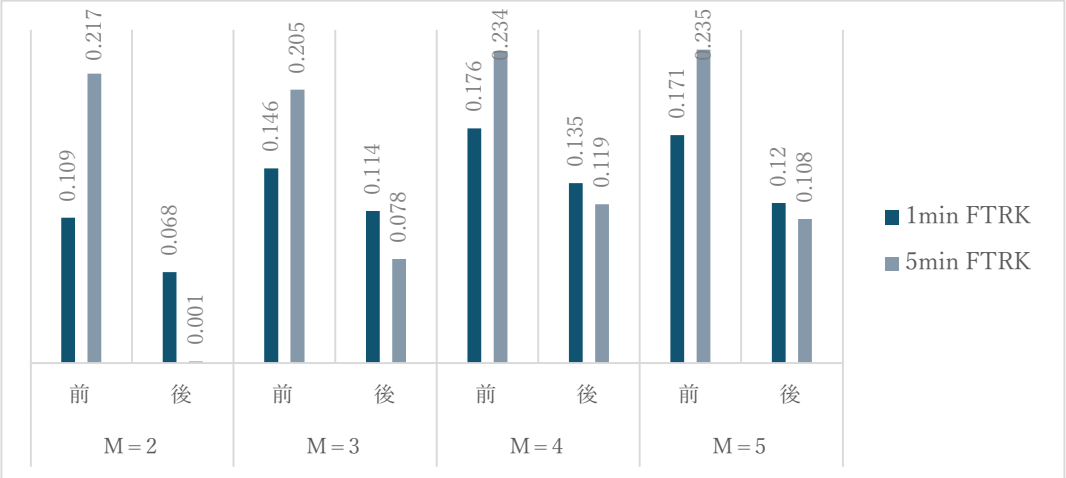
付録



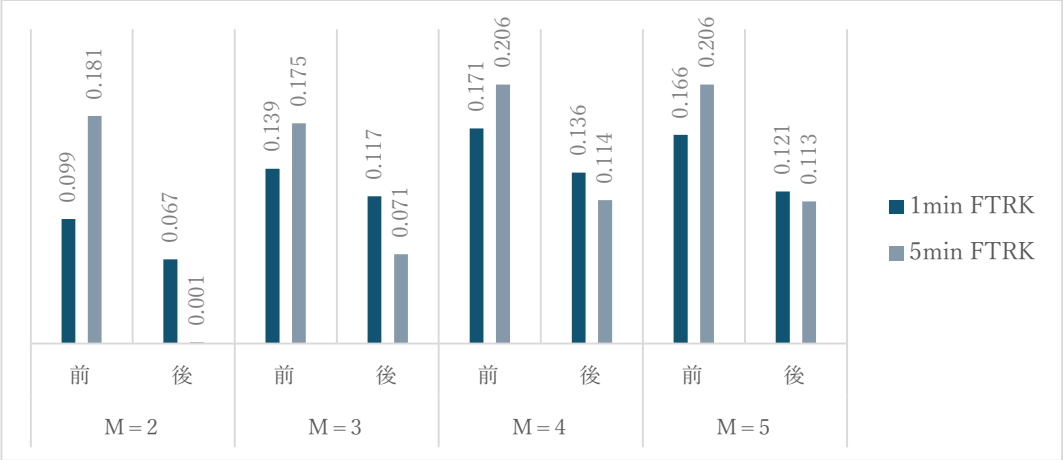
付図 1　robust alpha of RV



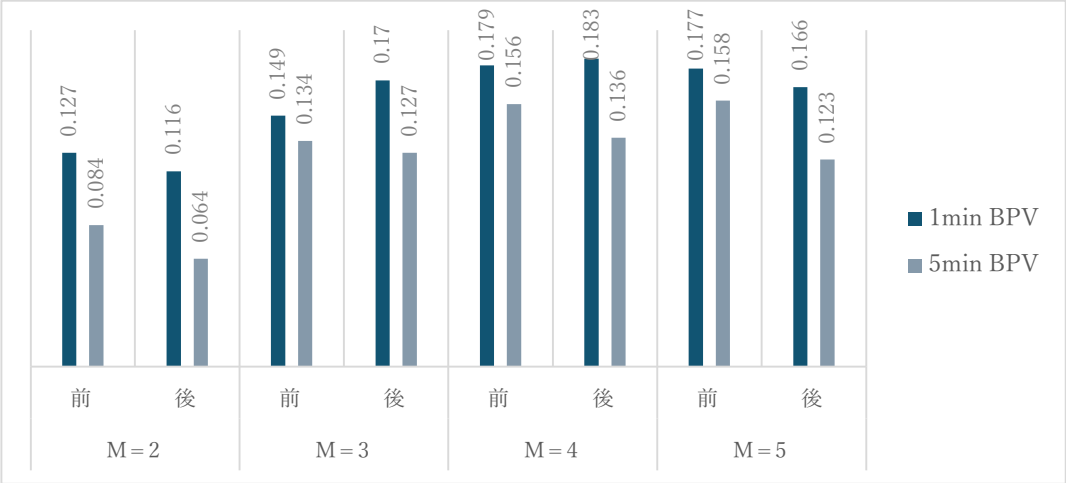
付図 2　robust alpha of RK



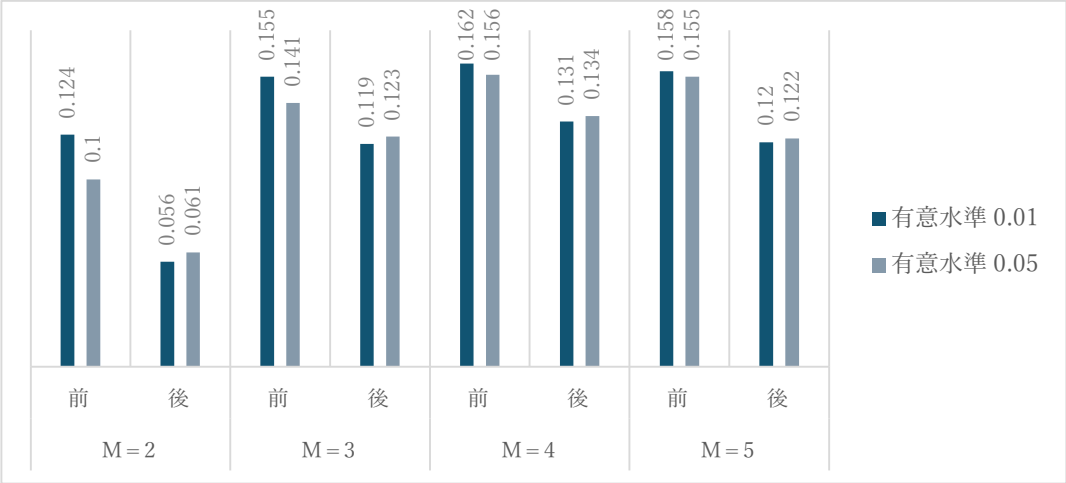
付図 3　robust alpha of FTRK (m=1)



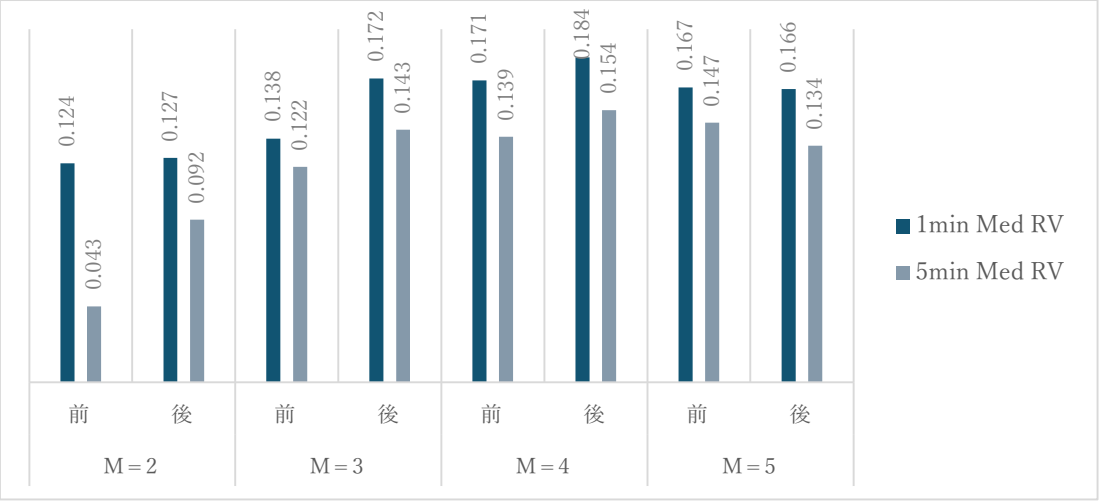
付図 4　robust alpha of FTRK (m=2)



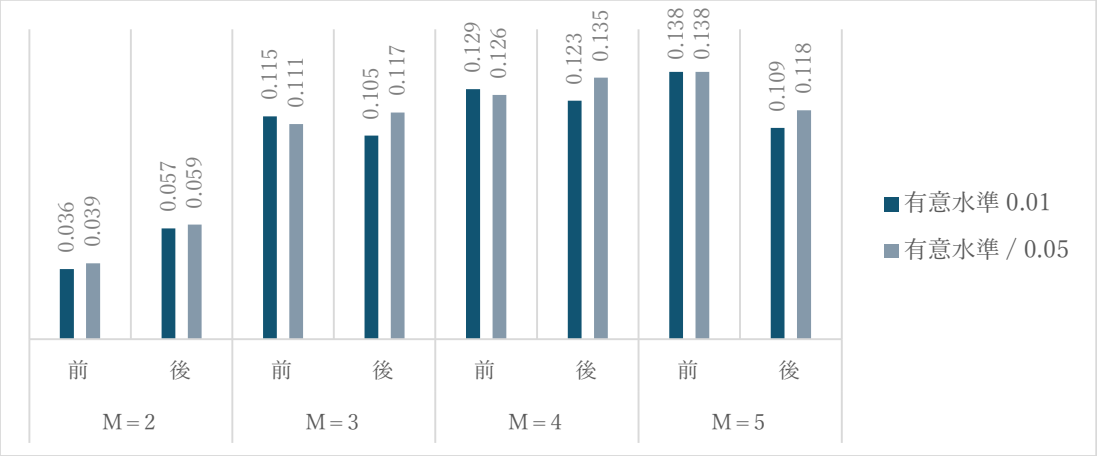
付図 5　robust alpha of BPV



付図 6　robust alpha of BPV CV



付図 7　robust alpha of Med RV



付図 8　robust alpha of Med RV CV

Examining Volatility Roughness in the Japanese Stock Market

Xuzhu ZHENG*
Masato UBUKATA†
Kosuke OYA‡

Abstract

This study examines the existence of rough volatility, which has recently attracted considerable attention and is characterized by volatility dynamics that cannot be fully captured by conventional volatility models. Specifically, we investigate whether the observed roughness in volatility is merely an artifact induced by microstructure noise inherent in high-frequency price data, or whether such rough behavior persists even after accounting for the effects of noise. The empirical analysis utilizes high-frequency data from the Nikkei 225 index as well as two representatives, actively traded individual stocks. Applying several representative volatility estimation methods, we first construct volatility series and then estimate their Hurst exponents using a nonparametric estimation procedure proposed in the literature. Our results show that, regardless of the presence of microstructure noise, the estimated Hurst exponents consistently take low values, suggesting that the volatility processes under study exhibit rough behavior. These findings provide supporting evidence for the necessity of incorporating roughness into volatility modeling to achieve a more refined understanding of volatility dynamics in financial markets.

JEL: C14, C55, C58
Keyword: High-frequency data, Volatility, Roughness

* Graduate School of Economics, The University of Osaka: u088026j@ecs.osaka-u.ac.jp
† The Faculty of Economics, Meiji Gakuin University: ubukata@eco.meijigakuin.ac.jp
‡ Graduate School of Economics, The University of Osaka, Center for Mathematical Modeling and Data Science, The University of Osaka: oya@econ.osaka-u.ac.jp